Эквивалентности сетей Петри для анализа параллельных систем *

Игорь В. Тарасюк

1 Введение

Сети Петри — популярная формальная модель для разработки параллельных и распределенных систем. Как известно, сети Петри дают возможность структурной характеризации трех фундаментальных аспектов параллельных вычислений: причинной зависимости, недетерминизма и параллелизма.

За последние годы в теории параллелизма введено большое число семантических эквивалентностей, многие из которых были определены на сетях Петри. Известны следующие основные понятия эквивалентностей.

- *Следовые эквивалентности* (учитывают только протоколы функционирования систем): интерливинговая [5], шаговая [8], частично упорядоченных мультимножеств (ЧУММ) [4].
- *Обычные бисимуляционные эквивалентности* (учитывают ветвистую структуру функционирования систем): интерливинговая [7], шаговая [6], частичных слов (ЧС) [10], ЧУММ [3] и процессная [1].
- *ST-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают длительность срабатывания действий в функционировании систем): интерливинговая [4], ЧС [10] и ЧУММ [10].
- *Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности* (учитывают "историю" функционирования систем): была введена ЧУММ-эквивалентность [9].
- *Сохраняющие конфликт эквивалентности* (полностью учитывают конфликты в системах): была рассмотрена О-процессная эквивалентность [4].
- *Изоморфизм* (то есть совпадение систем с точностью до переименования их компонент).

При разработке параллельных систем по методу "сверху-вниз" используется оператор *детализации (refinement)*, после применения которого некоторые элементарные компоненты систем приобретают внутреннюю структуру, то есть появляется возможность рассматривать такие системы на более низком уровне абстракции. В работе [2] был предложен оператор *SM-детализации* для сетей Петри, заменяющий их переходы на SM-сети, которые являются специальным подклассом автоматных сетей.

В данной работе с целью получения полного набора эквивалентностей для сетей Петри в дополнение к известным понятиям вводится ряд новых: следовые эквивалентности ЧС и процессов, ST-бисимуляционная и сохраняющая историю процессные бисимуляционные эквивалентности, а также эквивалентность на мультиструктурах событий. Устанавливаются взаимосвязи между новыми и известными понятиями эквивалентностей как на всем классе сетей Петри, так и на подклассе последовательных сетей (где невозможно параллельное срабатывание переходов). Кроме того, все рассмотренные поведенческие эквивалентности проверены на сохранение при SM-детализациях.

2 Основные определения

В данном разделе приводятся базисные определения, используемые в работе.

2.1 Сети

Пусть $Act = \{a, b, \dots\}$ — множество *действий* или *меток.*

Определение 2.1 Помеченная сеть — *четверка* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle$*, где:*

- $P_N = \{p, q, \dots\}$ — *множество* мест*;*

*Работа поддерживается ИНТАС-РФФИ, грант 95-0378 и Фондом Поддержки Проектов Молодых Ученых СО РАН

- $T_N = \{u, v, \ldots\}$ — *множество* переходов;

- $F_N : (P_N \times T_N) \cup (T_N \times P_N) \to \mathbf{N}$ — отношение инцидентности *с весами;*

- $l_N : T_N \to Act$ — пометка *переходов действиями.*

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle$ и $N' = \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'}\rangle$ — помеченные сети. Отображение $\beta : N \to N'$ — *изоморфизм* между N и N', обозначение $\beta : N \simeq N'$, если β — биекция такая, что $\beta(P_N) = P_{N'}$, $\beta(T_N) = T_{N'}$ и $\forall p \in P_N\ \forall t \in T_N\ F_N(p,t) = F_{N'}(\beta(p), \beta(t))$, $F_N(t,p) = F_{N'}(\beta(t), \beta(p))$, а также $\forall t \in T_N\ l_N(t) = l_{N'}(\beta(t))$. Помеченные сети N и N' *изоморфны*, обозначение $N \simeq N'$, если $\exists \beta : N \simeq N'$.

Для помеченной сети N и ее перехода $t \in T_N$, *предусловие* и *постусловие* t, обозначение соответственно ${}^\bullet t$ и $t^\bullet$, — мультимножества, определяемые следующим образом: $({}^\bullet t)(p) = F_N(p,t)$ и $(t^\bullet)(p) = F_N(t,p)$. Аналогичные определения вводятся для мест: $({}^\bullet p)(t) = F_N(t,p)$ и $(p^\bullet)(t) = F_N(p,t)$. Обозначим через ${}^\circ N = \{p \in P_N \mid {}^\bullet p = \emptyset\}$ множество *входных* мест N и через $N^\circ = \{p \in P_N \mid p^\bullet = \emptyset\}$ — множество *выходных* мест N.

Помеченная сеть N — *ациклическая*, если не существует последовательности $t_0, \ldots, t_n \in T_N$ такой, что $t_{i-1}^\bullet \cap {}^\bullet t_i \neq \emptyset$ $(1 \le i \le n)$ и $t_0 = t_n$. Помеченная сеть N — *ординарная*, если $\forall p \in P_N$ ${}^\bullet p$ и $p^\bullet$ — множества (а не мультимножества).

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle$ — ациклическая ординарная помеченная сеть и $x, y \in P_N \cup T_N$. Введем следующие понятия.

- $x \prec_N y \ \Leftrightarrow\ x F_N^+ y$, где F_N^+ — транзитивное замыкание F_N (отношение *строгой причинной зависимости*);

- $x \preceq_N y \ \Leftrightarrow\ (x \prec_N y) \vee (x = y)$ (отношение *причинной зависимости*);

- $x \#_N y \ \Leftrightarrow\ \exists t, u \in T_N\ (t \neq u,\ {}^\bullet t \cap {}^\bullet u \neq \emptyset,\ t \preceq_N x,\ u \preceq_N y)$ (отношение *конфликта*);

- $\downarrow_N x = \{y \in P_N \cup T_N \mid y \prec_N x\}$ (множество *строгих предшественников* x).

Множество $T \subseteq T_N$ *замкнуто влево* в N, если $\forall t \in T\ (\downarrow_N t) \cap T_N \subseteq T$. Множество T *безконфликтно* в N, если $\forall t, u \in T\ \neg(t \#_N u)$. Множество T — *конфигурация* в N, если оно конечно, замкнуто влево и безконфликтно в N.

Обозначим через $\mathcal{M}(X)$ *множество всех конечных мультимножеств* над множеством X. *Маркировка* помеченной сети N — мультимножество $M \in \mathcal{M}(P_N)$.

Определение 2.2 Маркированная сеть (сеть) — *пятерка* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$*, где* $\langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle$ — *помеченная сеть и* $M_N \in \mathcal{M}(P_N)$ — начальная *маркировка.*

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$ и $N' = \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'}, M_{N'}\rangle$ — маркированные сети. Отображение $\beta : N \to N'$ — *изоморфизм* между N и N', обозначение $\beta : N \simeq N'$, если $\beta : \langle P_N, T_N, F_N, l_N\rangle \simeq \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'}\rangle$ и $\forall p \in M_N\ M_N(p) = M_{N'}(\beta(p))$. Сети N и N' *изоморфны*, обозначение $N \simeq N'$, если $\exists \beta : N \simeq N'$.

Пусть $M \in \mathcal{M}(P_N)$ — маркировка сети N. Переход $t \in T_N$ *допустим* в M, если ${}^\bullet t \subseteq M$. Если t допустим в M, в результате его срабатывания получается новая маркировка $\widetilde{M} = M - {}^\bullet t + t^\bullet$, обозначение $M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$. Маркировка M сети N — *достижимая*, если $M = M_N$ или существует достижимая маркировка $\widehat{M}$ сети N и $t \in T_N$ такие, что $\widehat{M} \xrightarrow{t} M$. $Mark(N)$ обозначает множество *всех достижимых маркировок* сети N.

2.2 Частично упорядоченные множества

Определение 2.3 Помеченное частично упорядоченное множество (ПЧУМ) — *тройка* $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$*, где:*

- $X = \{x, y, \ldots\}$ — *некоторое множество;*

- $\prec \subseteq X \times X$ — *строгий частичный порядок (иррефлексивное транзитивное отношение) над* X*;*

- $l : X \to Act$ — *функция* пометки.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$ — ПЧУМ и $x \in X$. Тогда $\downarrow x = \{y \in X \mid y \prec x\}$ — множество *строгих предшественников* x.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$ и $\rho' = \langle X', \prec', l'\rangle$ — ПЧУМ.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *сохраняющая пометку биекция* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \approx \rho'$, если β — биекция такая, что $\forall x \in X\ l(x) = l'(\beta(x))$. Пишем $\rho \approx \rho'$, если $\exists \beta : \rho \approx \rho'$.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *гомоморфизм* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \sqsubseteq \rho'$, если $\beta : \rho \approx \rho'$ и $\forall x, y \in X\ x \prec y \ \Rightarrow\ \beta(x) \prec' \beta(y)$. Пишем $\rho \sqsubseteq \rho'$, если $\exists \beta : \rho \sqsubseteq \rho'$.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *изоморфизм* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \simeq \rho'$, если $\beta : \rho \sqsubseteq \rho'$ и $\beta^{-1} : \rho' \sqsubseteq \rho$. ПЧУМ ρ и ρ' *изоморфны*, обозначение $\rho \simeq \rho'$, если $\exists \beta : \rho \simeq \rho'$.

Определение 2.4 Частично упорядоченное мультимножество (ЧУММ) — *класс изоморфизма ПЧУМ.*

2.3 Структуры событий

Определение 2.5 Помеченная структура событий (ПСС) — *четверка* $\xi = \langle X, \prec, \#, l \rangle$, *где:*

- $X = \{x, y, \ldots\}$ — *множество* событий*;*
- $\prec \subseteq X \times X$ — *строгий частичный порядок, отношение* причинной зависимости*, удовлетворяющее принципу* конечности причин*:* $\forall x \in X \ | \downarrow x| < \infty$*;*
- $\# \subseteq X \times X$ — *иррефлексивное симметричное отношение* конфликта*, удовлетворяющее принципу* наследования конфликта*:* $\forall x, y, z \in X \ x \# y \prec z \ \Rightarrow \ x \# z$*;*
- $l : X \to Act$ — *функция* пометки.

Пусть $\xi = \langle X, \prec, \#, l \rangle$ и $\xi' = \langle X', \prec', \#', l' \rangle$ — ПСС. Отображение $\beta : X \to X'$ — *изоморфизм* между ξ и ξ', обозначение $\beta : \xi \simeq \xi'$, если $\beta : \langle X, \prec, l \rangle \simeq \langle X', \prec', l' \rangle$ и $\forall x, y \in X \ x \# y \ \Leftrightarrow \ \beta(x) \#' \beta(y)$. ПСС ξ и ξ' *изоморфны*, обозначение $\xi \simeq \xi'$, если $\exists \beta : \xi \simeq \xi'$.

Определение 2.6 Мультиструктура событий (МСС) — *класс изоморфизма ПСС.*

2.3.1 С-процессы

Определение 2.7 С-сеть — *ациклическая ординарная помеченная сеть* $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C \rangle$*, такая, что:*

1. $\forall r \in P_C \ |^\bullet r| \le 1$ *и* $|r^\bullet| \le 1$*, то есть места не ветвятся;*
2. $| \downarrow_C x| < \infty$*, то есть множество причин конечно.*

Заметим, что любой С-сети $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C \rangle$ соответствует ПЧУМ $\rho_C = \langle T_C, \prec_N \cap (T_C \times T_C), l_C \rangle$. Фундаментальное свойство С-сетей [1]: если C — С-сеть, тогда существует последовательность переходов ${}^\circ C = L_0 \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_n} L_n = C^\circ$ такая, что $L_i \subseteq P_C$ $(0 \le i \le n)$, $P_C = \cup_{i=0}^n L_i$ и $T_C = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Такая последовательность называется *полным выполнением* C.

Определение 2.8 *Даны сеть* N *и С-сеть* C*. Отображение* $\varphi : P_C \cup T_C \to P_N \cup T_N$ — встраивание C *в* N*, обозначение* $\varphi : C \to N$*, если:*

1. $\varphi(P_C) \in \mathcal{M}(P_N)$ *и* $\varphi(T_C) \in \mathcal{M}(T_N)$*, то есть сохраняются типы элементов сетей;*
2. $\forall v \in T_C \ {}^\bullet\varphi(v) = \varphi({}^\bullet v)$ *и* $\varphi(v)^\bullet = \varphi(v^\bullet)$*, то есть учитывается отношение инцидентности;*
3. $\forall v \in T_C \ l_C(v) = l_N(\varphi(v))$*, то есть сохраняется пометка.*

Так как встраивания учитывают отношение инцидентности, если ${}^\circ C \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_n} C^\circ$ — полное выполнение C, то $M = \varphi({}^\circ C) \xrightarrow{\varphi(v_1)} \cdots \xrightarrow{\varphi(v_n)} \varphi(C^\circ) = \widetilde{M}$ — последовательность переходов в N, обозначение $M \xrightarrow{C, \varphi} \widetilde{M}$.

Определение 2.9 С-процесс (процесс), допустимый в маркировке M *сети* N — *пара* $\pi = (C, \varphi)$*, где* C — *С-сеть и* $\varphi : C \to N$ — *встраивание такое, что* $M = \varphi({}^\circ C)$*. Допустимый в* M_N *процесс* — процесс N.

Обозначим множество всех *процессов, допустимых в маркировке* M сети N через $\Pi(N, M)$ и множество всех *процессов* сети N через $\Pi(N)$. *Начальный* процесс сети N — процесс $\pi_N = (C_N, \varphi_N) \in \Pi(N)$, такой, что $T_{C_N} = \emptyset$. Если $\pi \in \Pi(N, M)$, то выполнение этого процесса преобразует маркировку M в $\widetilde{M} = M - \varphi({}^\circ C) + \varphi(C^\circ) = \varphi(C^\circ)$, обозначение $M \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$.

Пусть $\pi = (C, \varphi)$, $\tilde{\pi} = (\widetilde{C}, \tilde{\varphi}) \in \Pi(N)$, $\hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi}) \in \Pi(N, \varphi(C^\circ))$. Процесс $\tilde{\pi}$ — *расширение* π *на процесс* $\hat{\pi}$, запись $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, если $T_C \subseteq T_{\widetilde{C}}$ — замкнутое влево множество в $\widetilde{C}$ и $T_{\widehat{C}} = T_{\widetilde{C}} \setminus T_C$. Пишем $\pi \to \tilde{\pi}$, если $\exists \hat{\pi} \ \pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$. Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение процесса π *на одно действие*, запись $\pi \xrightarrow{v} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{a} \tilde{\pi}$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, $T_{\widehat{C}} = \{v\}$ и $l_{\widehat{C}}(v) = a$. Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение π *на мультимножество действий* или *шаг*, запись $\pi \xrightarrow{V} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{A} \tilde{\pi}$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, $\prec_{\widehat{C}} = \emptyset$, $T_{\widehat{C}} = V$ и $l_{\widehat{C}}(V) = A$.

2.3.2 О-процессы

Определение 2.10 О-сеть — *ациклическая ординарная помеченная сеть* $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$*, такая, что:*

1. $\forall r \in P_O\ |{}^\bullet r| \leq 1$*, то есть нет прямого конфликта;*
2. $\forall x \in P_O \cup T_O\ \neg(x \#_O x)$*, то есть отношение конфликта иррефлексивно;*
3. $\forall x \in P_O \cup T_O\ |\downarrow_O x| < \infty$*, то есть множество причин конечно.*

Заметим, что любой О-сети $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$ соответствует ПСС $\xi_O = \langle T_O, \prec_O \cap (T_O \times T_O), \#_O \cap (T_O \times T_O), l_O \rangle$.

Определение 2.11 *Пусть* $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$ *— О-сеть и* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ *— некоторая сеть. Отображение* $\psi : P_O \cup T_O \to P_N \cup T_N$ — встраивание O *в* N*, обозначение* $\psi : O \to N$*, если:*

1. $\psi(P_O) \in \mathcal{M}(P_N)$ *и* $\psi(T_O) \in \mathcal{M}(T_N)$*, то есть сохраняются типы элементов сетей;*
2. $\forall v \in T_O\ l_O(v) = l_N(\psi(v))$*, то есть сохраняется пометка;*
3. $\forall v \in T_O\ {}^\bullet\psi(v) = \psi({}^\bullet v)$ *и* $\psi(v)^\bullet = \psi(v^\bullet)$*, то есть учитывается отношение инцидентности;*
4. $\forall v, w \in T_O\ ({}^\bullet v = {}^\bullet w) \wedge (\psi(v) = \psi(w)) \Rightarrow\ v = w$*, то есть нет "лишних" конфликтов.*

Определение 2.12 О-процесс *сети* N *— пара* $\varpi = (O, \psi)$*, где* O *— О-сеть, а* $\psi : O \to N$ *— встраивание такое, что* $M_N = \psi({}^\circ O)$*.*

Обозначим множество всех *О-процессов* сети N через $\wp(N)$. *Начальный* О-процесс сети N совпадает с начальным С-процессом, то есть $\varpi_N = \pi_N$.

Пусть $\varpi = (O, \psi)$, $\tilde{\varpi} = (\widetilde{O}, \widetilde{\psi}) \in \wp(N)$. О-процесс $\tilde{\varpi}$ — *расширение* О-процесса ϖ, запись $\varpi \to \tilde{\varpi}$, если $T_O \subseteq T_{\widetilde{O}}$ — замкнутое влево множество в $\widetilde{O}$.

О-процесс ϖ сети N — *максимальный*, если $\forall \tilde{\varpi} = (\widetilde{O}, \tilde{\psi}) \in \wp(N)$ таких, что $\varpi \to \tilde{\varpi}$ выполняется $T_{\widetilde{O}} \setminus T_O = \emptyset$. Обозначим множество всех *максимальных О-процессов* сети N через $\wp_{max}(N)$. Заметим, что $\wp_{max}(N)$ состоит из единственного О-процесса вида $\varpi_{max} = (O_{max}, \psi_{max})$. В этом случае класс изоморфизма О-сети O_{max} — *развертка* сети N, обозначение $\mathcal{U}(N)$. Развертке $\mathcal{U}(N)$ соответствует МСС $\mathcal{E}(N) = \xi_{\mathcal{U}(N)}$ — класс изоморфизма ПСС ξ_O для $O \in \mathcal{U}(N)$.

3 Эквивалентностные понятия

В данном разделе рассматриваются эквивалентностные понятия для сетей Петри.

3.1 Следовые эквивалентности

Следовые эквивалентности учитывают только протоколы функционирования сетей, и не принимают во внимание момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса.

Определение 3.1 Интерливинговый след *сети* N *— последовательность* $a_1 \cdots a_n \in Act^*$ *такая, что* $\pi_N \stackrel{a_1}{\to} \pi_1 \stackrel{a_2}{\to} \ldots \stackrel{a_n}{\to} \pi_n$*, где* $\pi_i \in \Pi(N)$ $(1 \leq i \leq n)$*.* $IntTraces(N)$ *обозначает* множество всех интерливинговых следов N*. Сети* N *и* N' интерливингово следово эквивалентны*, обозначение* $N \equiv_i N'$*, если* $IntTraces(N) = IntTraces(N')$*.*

Определение 3.2 Шаговый след *сети* N *— последовательность* $A_1 \cdots A_n \in (\mathcal{M}(Act))^*$ *такая, что* $\pi_N \stackrel{A_1}{\to} \pi_1 \stackrel{A_2}{\to} \ldots \stackrel{A_n}{\to} \pi_n$*, где* $\pi_i \in \Pi(N)$ $(0 \leq i \leq n)$*.* $StepTraces(N)$ *обозначает* множество всех шаговых следов N*. Сети* N *и* N' шагово следово эквивалентны*, обозначение* $N \equiv_s N'$*, если* $StepTraces(N) = StepTraces(N')$*.*

Определение 3.3 ЧУММ-след *сети* N *— ЧУММ* ρ*, класс изоморфизма ПЧУМ* ρ_C *для* $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$*. Пишем* $\rho \sqsubseteq \rho'$*, если* $\rho_C \sqsubseteq \rho_{C'}$*, где* $\rho_C \in \rho$ *и* $\rho_{C'} \in \rho'$*. В таком случае ЧУММ* ρ более параллельное*, чем* ρ'*.* $Pomsets(N)$ *обозначает* множество всех ЧУММ-следов *сети* N*. Сети* N *и* N' ЧС следово эквивалентны*, обозначение* $N \equiv_{pw} N'$*, если* $Pomsets(N) \sqsubseteq Pomsets(N')$ *и* $Pomsets(N') \sqsubseteq Pomsets(N)$*, то есть для любого* $\rho' \in Pomsets(N')$ *существует* $\rho \in Pomsets(N)$ *такое, что* $\rho \sqsubseteq \rho'$*, и наоборот.*

Определение 3.4 *Сети* N *и* N' ЧУММ следово эквивалентны*, обозначение* $N \equiv_{pom} N'$*, если* $Pomsets(N) = Pomsets(N')$*.*

Определение 3.5 Процессный след *сети* N *— класс изоморфизма С-сети* C *для* $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$*.* $ProcessNets(N)$ *обозначает* множество всех процессных следов N*. Сети* N *и* N' процессно следово эквивалентны*, обозначение* $N \equiv_{pr} N'$*, если* $ProcessNets(N) = ProcessNets(N')$*.*

3.2 Обычные бисимуляционные эквивалентности

Бисимуляционные эквивалентности учитывают момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса (“ветвления”).

Определение 3.6 *Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N')$ — $\star$-бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in${интерливингивая, шаговая, ЧС, ЧУММ, процессная}*, запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star N'$, $\star \in \{i, s, pw, pom, pr\}$*, если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi') \in \mathcal{R}$, $\pi \stackrel{\hat{\pi}}{\rightarrow} \tilde{\pi}$,
   - *(а)* $|T_{\widehat{C}}| = 1$, *если* $\star = i$;
   - *(б)* $\prec_{\widehat{C}} = \emptyset$, *если* $\star = s$;

   $\Rightarrow \exists \tilde{\pi}' :\ \pi' \stackrel{\hat{\pi}'}{\rightarrow} \tilde{\pi}',\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in \mathcal{R}$ *и*

   - *(а)* $\rho_{\widehat{C}'} \sqsubseteq \rho_{\widehat{C}}$, *если* $\star = pw$;
   - *(б)* $\rho_{\widehat{C}} \simeq \rho_{\widehat{C}'}$, *если* $\star \in \{i, s, pom\}$;
   - *(в)* $\widehat{C} \simeq \widehat{C}'$, *если* $\star = pr$.
3. *Как пункт 2, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-бисимуляционно эквивалентны, $\star \in${интерливингивая, шаговая, ЧС, ЧУММ, процессная}*, запись* $N \underline{\leftrightarrow}_\star N'$*, если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star N'$, $\star \in \{i, s, pw, pom, pr\}$.

3.3 ST-бисимуляционные эквивалентности

Для определения ST-бисимуляционных эквивалентностей введем понятие ST-процесса, которых представляет состояния сети с временной протяженностью срабатывания переходов.

Определение 3.7 ST-процесс *сети* N — *пара* (π_E, π_P) *такая, что* $\pi_E,\ \pi_P \in \Pi(N)$, $\pi_P \stackrel{\pi_W}{\rightarrow} \pi_E$ *и* $\forall v, w \in T_{C_E}\ v \prec_{C_E} w \ \Rightarrow\ v \in T_{C_P}$

В таком случае π_E — процесс, который начал работать, то есть все действия π_E начали выполняться. Процесс π_P соответствует закончившей работу части π_E, а π_W — еще работающей части. $ST-\Pi(N)$ обозначает множество всех *ST-процессов* сети N. (π_N, π_N) — *начальный ST-процесс* сети N. Пусть $(\pi_E, \pi_P),\ (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \in ST - \Pi(N)$. Пишем $(\pi_E, \pi_P) \rightarrow (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)$, если $\pi_E \rightarrow \tilde{\pi}_E$ и $\pi_P \rightarrow \tilde{\pi}_P$.

ST-бисимуляционные эквивалентности учитывают длительность срабатывания переходов при функционировании сетей, в предположении, что работающие в данный момент переходы забирают фишки из своих входных мест, но еще не выдают их в выходные места [4].

Определение 3.8 *Отношение* $\mathcal{R} \subseteq ST - \Pi(N) \times ST - \Pi(N') \times \mathcal{B}$*, где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : T_C \rightarrow T_{C'},\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ — $\star$-ST-бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in${интерливинговая, ЧС, ЧУММ, процессная}*, запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$*, если:*

1. $((\pi_N, \pi_N), (\pi_{N'}, \pi_{N'}), \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}\ \Rightarrow\ \beta : \rho_{C_E} \approx \rho_{C'_E}$ *и* $\beta(T_{C_P}) = T_{C'_P}$.
3. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}$, $(\pi_E, \pi_P) \rightarrow (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)\ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P) :\ (\pi'_E, \pi'_P) \rightarrow (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P)$, $\tilde{\beta}|_{T_{C_E}} = \beta$, $((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$*, и если* $\pi_P \stackrel{\pi}{\rightarrow} \tilde{\pi}_E$, $\pi'_P \stackrel{\pi'}{\rightarrow} \tilde{\pi}'_E$, $\gamma = \tilde{\beta}|_{T_C}$*, то:*
   - *(а)* $\gamma^{-1} : \rho_{C'} \sqsubseteq \rho_C$, *если* $\star = pw$;
   - *(б)* $\gamma : \rho_C \simeq \rho_{C'}$, *если* $\star \in \{pom, pr\}$;
   - *(в)* $C \simeq C'$, *если* $\star = pr$.
4. *Как пункт 3, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-ST-бисимуляционно эквивалентны, $\star \in$ {интерливингивая, ЧС, ЧУММ, процессная}*, запись* $N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$*, если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom, pr\}$.

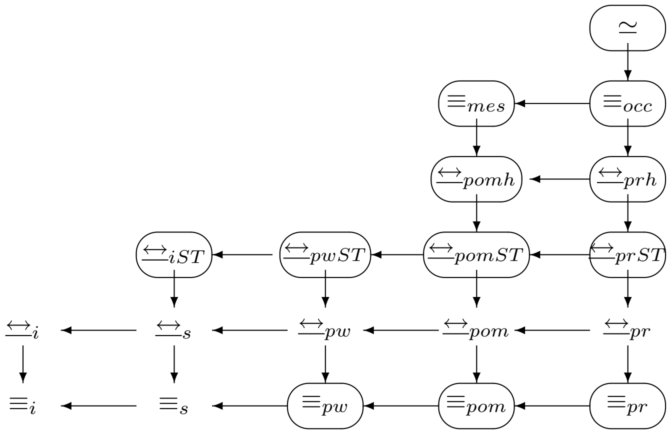

Рис. 1: Взаимосвязи эквивалентностей и их сохранение при SM-детализациях

3.4 Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности

Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности учитывают “прошлое” (историю) функционирования сетей, то есть при моделировании учитывается та часть процесса, выполнение которой приводит в текущее состояние.

Определение 3.9 *Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : T_C \to T_{C'},\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ — $\star$-сохраняющая историю бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in${ЧУММ, процессная}, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_{\star h} N'$, $\star \in \{pom, pr\}$, *если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}, \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow$
   (а) $\beta : \rho_C \simeq \rho_{C'}$, *если* $\star \in \{pom, pr\}$;
   (б) $C \simeq C'$, *если* $\star = pr$.
3. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R},\ \pi \to \tilde{\pi} \ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ \tilde{\pi}' : \pi' \to \tilde{\pi}',\ \tilde{\beta}|_{T_C} = \beta,\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.
4. *Как пункт 3, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-сохраняюще историю бисимуляционно эквивалентны, $\star \in${ЧУММ, процессная}, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_{\star h} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star h} N'$, $\star \in \{pom, pr\}$.

3.4.1 Сохраняющие конфликт эквивалентности

Сохраняющие конфликт эквивалентности полностью учитывают конфликты в сетях.

Определение 3.10 *Сети* N *и* N' МСС-эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{mes} N'$, *если* $\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(N')$.

Определение 3.11 *Сети* N *и* N' О-процессно эквивалентны, *обозначение* $N \equiv_{occ} N'$, *если* $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(N')$.

4 Сравнение эквивалентностей

В данном разделе исследуются взаимосвязи между введенными эквивалентностями на всем классе сетей Петри.

Пусть символ ‘_’ обозначает пустую альтернативу.

Теорема 4.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \twoheadleftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$ *и* $\star, \star\star \in \{\_, i, s, pw, pom, pr, iST, pwST, pomST, prST, pomh, prh, mes, occ\}$. *Для сетей* N *и* N' *справедливо:* $N \leftrightarrow_\star N' \ \Rightarrow\ N \twoheadleftrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда существует направленный путь от* $\leftrightarrow_\star$ *к* $\twoheadleftrightarrow_{\star\star}$ *в графе на рисунке 1.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Импликации на рисунке 1 действительны по определениям эквивалентностей.

$\Rightarrow$ Отсутствие дополнительных нетривиальных связей на рисунке 1 доказывается следующими примерами.

- На рисунке 2(а) $N \underline{\leftrightarrow}_i N'$, но $N \not\equiv_s N'$, так как только в сети N' действия a и b не могут сработать параллельно.

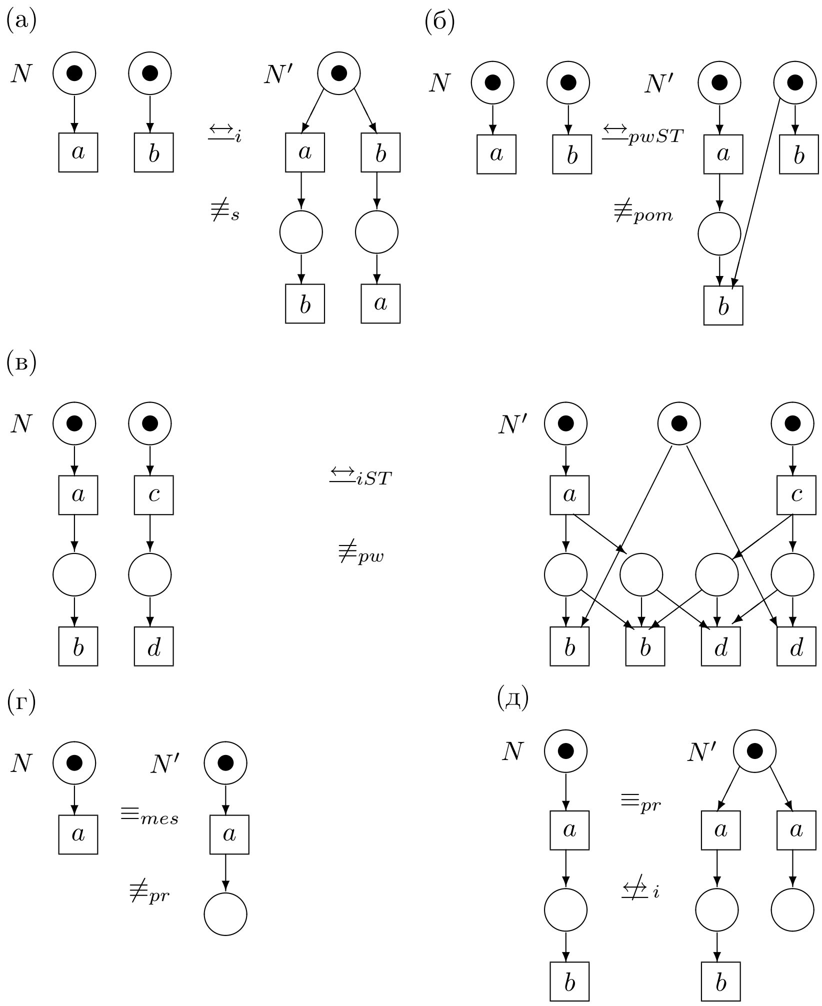

Рис. 2: Примеры эквивалентностей

- На рисунке 2(в) $N\underline{\leftrightarrow}_{iST}N'$, но $N \not\equiv_{pw} N'$, так как сети N соответствует ЧУММ такое, что даже более параллельное ЧУММ не может быть выполнено в N'.
- На рисунке 2(б) $N\underline{\leftrightarrow}_{pwST}N'$, но $N \not\equiv_{pom} N'$, так как только в сети N' действие b может зависеть от a.
- На рисунке 2(г) $N \equiv_{mes} N'$, но $N \not\equiv_{pr} N'$, так как N' — С-сеть, не изоморфная С-сети N (из-за дополнительного выходного места).
- На рисунке 2(д) $N \equiv_{pr} N'$, но $N\not\underline{\leftrightarrow}_i N'$, так как только в сети N' можно выполнить действие a так, что после него нельзя выполнить b.
- На рисунке 3(а) $N\underline{\leftrightarrow}_{pr}N'$, но $N\not\underline{\leftrightarrow}_{iST}N'$, так как в сети N' действие a может так начать работать, что никакое b уже не может стартовать, пока a не окончит работу.
- На рисунке 3(б) $N\underline{\leftrightarrow}_{prST}N'$, но $N\not\underline{\leftrightarrow}_{pomh}N'$, так как только в сети N' можно выполнить a и b так, чтобы следующее действие, c, обязательно зависело от a.
- На рисунке 3(в) $N\underline{\leftrightarrow}_{prh}N'$, но $N \not\equiv_{mes} N'$, так как сети N' соответствует ПСС с двумя конфликтными между собой действиями a.
- На рисунке 3(г) $N \equiv_{occ} N'$, но $N \not\simeq N'$, так как никогда не срабатывающие переходы сетей N и N' помечены разными действиями (a и b). $\square$

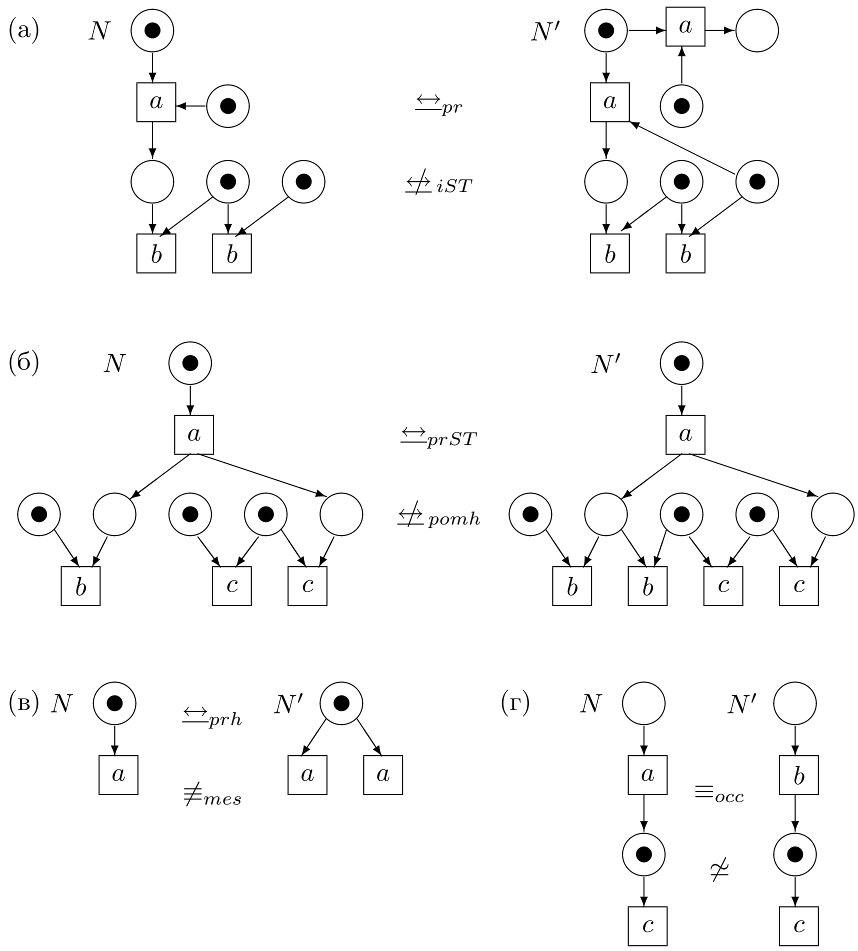

Рис. 3: Примеры эквивалентностей (продолжение)

5 Сохранение эквивалентностей при детализациях

В данном разделе эквивалентностные понятия проверяются на сохранение при применении операции детализации, то есть при переходе на более низкий уровень абстракции.

Определение 5.1 SM-сеть — *сеть* $D = \langle P_D, T_D, F_D, l_D, M_D\rangle$ *такая, что:*

1. $\forall t \in T_D\ |{}^{\bullet}t| = |t^{\bullet}| = 1$, *то есть каждый имеет ровно одно входное и ровно одно выходное места;*

2. $\exists p_{in},\ p_{out} \in P_D$ *такие, что* $p_{in} \neq p_{out}$ *и* ${}^{\circ}D = \{p_{in}\},\ D^{\circ} = \{p_{out}\}$, *то есть сеть* D *имеет единственное входное и единственное выходное места.*

3. $M_D = \{p_{in}\}$, *то есть сначала имеется единственная фишка в* p_{in}.

Определение 5.2 *Пусть* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$ *— некоторая сеть,* $a \in l_N(T_N)$ *и* $D = \langle P_D, T_D, F_D, l_D, M_D\rangle$ *— SM-сеть.* SM-детализация*, обозначение* $ref(N, a, D)$*, — это (с точностью до изоморфизма) сеть* $\overline{N} = \langle P_{\overline{N}}, T_{\overline{N}}, F_{\overline{N}}, l_{\overline{N}}, M_{\overline{N}}\rangle$*, такая, что:*

1. $P_{\overline{N}} = P_N \cup \{\langle p, u\rangle \mid p \in P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\},\ u \in l_N^{-1}(a)\}$;

2. $T_{\overline{N}} = (T_N \setminus l_N^{-1}(a)) \cup \{\langle t, u\rangle \mid t \in T_D,\ u \in l_N^{-1}(a)\}$;

3. $F_{\overline{N}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} F_N(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{x}, \bar{y} \in P_N \cup (T_N \setminus l_N^{-1}(a)); \\ F_D(x, y), & \bar{x} = \langle x, u\rangle,\ \bar{y} = \langle y, u\rangle,\ u \in l_N^{-1}(a); \\ F_N(\bar{x}, u), & \bar{y} = \langle y, u\rangle,\ \bar{x} \in {}^{\bullet}u,\ u \in l_N^{-1}(a),\ y \in p_{in}^{\bullet}; \\ F_N(u, \bar{y}), & \bar{x} = \langle x, u\rangle,\ \bar{y} \in {}^{\bullet}u,\ u \in l_N^{-1}(a),\ x \in {}^{\bullet}p_{out}; \\ 0, & \textit{иначе}; \end{cases}$

4. $l_{\overline{N}}(\bar{u}) = \begin{cases} l_N(\bar{u}), & \bar{u} \in T_N \setminus l_N^{-1}(a); \\ l_D(t), & \bar{u} = \langle t, u\rangle,\ t \in T_D,\ u \in l_N^{-1}(a); \end{cases}$

5. $M_{\overline{N}}(p) = \begin{cases} M_N(p), & p \in P_N; \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$

Некоторая сетевая эквивалентность *сохраняется при детализациях*, если эквивалентные сети остаются таковыми после одновременного применения к ним любого оператора детализации.

Теорема 5.1 *Пусть* $\leftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$ *и* $\star \in \{\_, i, s, pw, pom, pr, iST, pwST, pomST, prST, pomh, prh, mes, occ\}$*. Для сетей* N *и* N' *таких, что* $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'})$ *и SM-сети* D *справедливо:* $N \leftrightarrow_\star N' \;\Rightarrow\; ref(N, a, D) \leftrightarrow_\star ref(N', a, D)$ *тогда и только тогда, когда эквивалентность* $\leftrightarrow_\star$ *заключена в овал на рисунке 1.*

6 Сравнение эквивалентностей на последовательных сетях

В данном разделе исследуется взаимосвязи между введенными эквивалентностями на последовательных сетях, в которых невозможно параллельное выполнение переходов.

Определение 6.1 Последовательная сеть — *сеть* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$ *такая, что* $\forall M \in Mark(N)$ $\neg\exists t, u \in T_N:\ {}^{\bullet}t + {}^{\bullet}u \subseteq M$*, то есть никакие два перехода не допустимы вместе ни в одной из достижимых маркировок.*

Предложение 6.1 *Для последовательных сетей* N *и* N' *справедливо:*

1. $N \equiv_i N' \;\Leftrightarrow\; N \equiv_{pom} N'$;

2. $N \underline{\leftrightarrow}_i N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N'$ [2].

Теорема 6.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \twoheadleftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$ *и* $\star, \star\star \in \{\_, i, pr, prST, prh, mes, occ\}$*. Для последовательных сетей* N *и* N' *справедливо:* $N \leftrightarrow_\star N' \;\Rightarrow\; N \twoheadleftrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда существует направленный путь от* $\leftrightarrow_\star$ *к* $\twoheadleftrightarrow_{\star\star}$ *в графе на рисунке 4.*

$$\begin{tikzcd}
 & \simeq \arrow[d] \\
\equiv_{mes} \arrow[ddd] & \equiv_{occ} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}_{prh} \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}_{prST} \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}_{i} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}_{pr} \arrow[l] \arrow[d] \\
\equiv_{i} & \equiv_{pr} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 4: Взаимосвязь эквивалентностей на последовательных сетях

7 Заключение

В данной работе была исследована и дополнена новыми понятиями группа базисных поведенческих эквивалентностей, которые могут быть использованы для рассмотрения поведения систем, моделируемых сетями Петри, на различных уровнях абстракции.

Основной результат работы состоит в установлении взаимосвязей между эквивалентностными понятиями как на всем классе сетей Петри, так и на подклассе последовательных сетей. Все рассмотренные эквивалентности проверены на сохранение при SM-детализациях. Таким образом, мы можем использовать эквивалентностные понятия, которые сохраняются при SM-детализациях, для разработки параллельных систем по методу “сверху-вниз”.

В дальнейшем, мы намерены расширить область исследований на сети с τ-переходами (которые помечены невидимыми τ-действиями). Так как это более широкий класс сетей, некоторые связи между эквивалентностями на таких сетях могут измениться или перестать существовать.

Список литературы

[1] Autant C., Schnoebelen Ph. *Place bisimulations in Petri nets. LNCS* **616**, p. 45–61, June 1992.

[2] Best E., Devillers R., Kiehn A., Pomello L. *Concurrent bisimulations in Petri nets.* Acta Informatica **28**, p. 231–264, 1991.

[3] Boudol G., Castellani I. *On the semantics of concurrency: partial orders and transition systems. LNCS* **249**, p. 123–137, 1987.

[4] van Glabbeek R.J., Vaandrager F.W. *Petri net models for algebraic theories of concurrency. LNCS* **259**, p. 224–242, 1987.

[5] Hoare C.A.R. *Communicating sequential processes, on the construction of programs.* (McKeag R.M., Macnaghten A.M., eds.) Cambridge University Press, p. 229–254, 1980.

[6] Nielsen M., Thiagarajan P.S. *Degrees of non-determinizm and concurrency: a Petri net view. LNCS* **181**, p. 89–117, December 1984.

[7] Park D.M.R. *Concurrency and automata on infinite sequences. LNCS* **104**, p. 167–183, March 1981.

[8] Pomello L. *Some equivalence notions for concurrent systems. An overview. LNCS* **222**, p. 381–400, 1986.

[9] Rabinovitch A., Trakhtenbrot B.A. *Behaviour structures and nets.* Fundamenta Informaticae **XI**, p. 357–404, 1988.

[10] Vogler W. *Bisimulation and action refinement. LNCS* **480**, p. 309–321, 1991.