τ-эквивалентности и детализация для разработки параллельных систем на основе сетей Петри *

Игорь В. Тарасюк

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск, 630 090, Россия.
Эл. почта: itar@iis.nsk.su

Аннотация

Работа посвящена исследованию поведенческих эквивалентностей параллельных систем, моделируемых сетями Петри с невидимыми переходами. Известные из литературы базисные τ-эквивалентности и обратные-прямые τ-бисимуляционные эквивалентности дополняются новыми понятиями. В результате получен достаточно полный набор эквивалентностных отношений в пределах от интерливинговой до "истинно параллельной" семантик, и от семантик "линейного" до "ветвистого" времени. Изучаются взаимосвязи всех упомянутых эквивалентностных понятий на всем классе сетей Петри и на их подклассах: сетях без невидимых переходов и последовательных сетях (без параллельных переходов). Кроме того, исследуется вопрос сохранения эквивалентностей при операции детализации, позволяющей рассматривать моделируемые системы на более низком уровне структурной абстракции.

Ключевые слова: сети Петри с невидимыми переходами, последовательные сети, базисные и обратные-прямые τ-эквивалентности, детализация.

1 Введение

Понятие эквивалентности является центральным понятием любой теории систем. Оно позволяет сравнивать моделируемые структуры с учетом определенных аспектов их поведения.

Сети Петри [16] стали популярной формальной моделью для разработки параллельных и распределнных систем. Одно из основных достоинств сетей Петри состоит в их способности структурной характеризации трех фундаментальных понятий, связанных с параллельными вычислениями: причинной зависимости, недетерминизма и параллелизма.

Невидимые переходы — это переходы сетей, помеченные специальным символом *невидимого* действия τ, которое символизирует внутреннюю активность системы и является невидимым для внешнего наблюдателя. Хорошо известно, что сети Петри с невидимыми переходами обладают большей описательной силой, чем обычные, в которых все переходы являются видимыми.

Эквивалентности, которые абстрагируются от невидимых действий, называются *τ-эквивалентностями* (они помечаются символом τ для того, чтобы отличать их от отношений, не абстрагирующихся от внутренней активности систем).

В последние годы, в теории параллелизма был введен широкий набор семантических эквивалентностей. Некоторые из них были непосредственно определены на сетях Петри, а другие — перенесены из других формальных моделей. Следующие базисные понятия τ-эквивалентностей известны из литературы.

- *τ-следовые эквивалентности* (учитывают только протоколы поведения систем): интерливинговая ($\equiv_i^\tau$) [17], шаговая ($\equiv_s^\tau$) [17], частичных слов, ЧС ($\equiv_{pw}^\tau$) [25] и частично упорядоченных мультимножеств, ЧУММ ($\equiv_{pom}^\tau$) [18].
- *Обычные τ-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают ветвистую структуру поведения систем): интерливинговая ($\underline{\leftrightarrow}_i^\tau$) [14], шаговая ($\underline{\leftrightarrow}_s^\tau$) [17], ЧС ($\underline{\leftrightarrow}_{pw}^\tau$) [24] и ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}_{pom}^\tau$) [18].
- *ST-τ-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают продолжительность или максимальность событий в поведении систем): интерливинговая ($\underline{\leftrightarrow}_{iST}^\tau$) [24], ЧС ($\underline{\leftrightarrow}_{pwST}^\tau$) [24] и ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}_{pomST}^\tau$) [24].

*Данная работа поддержана Фондом молодых ученых СО РАН

- *Сохраняющие историю τ-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают "прошлое" или "историю" поведения систем): ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}$) [9, 10].

- *Сохраняющие историю ST-τ-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают "историю" и продолжительность или максимальность событий в поведении систем): ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST}$) [9, 10].

- *Обычные ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают ветвистую структуру поведения систем, обращая особое внимание на невидимые действия): интерливинговая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$) [12, 13].

- *Сохраняющие историю ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентности* (учитывают "историю" и ветвистую структуру поведения систем, обращая особое внимание на невидимые действия): ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}$) [9].

- *Изоморфизм* ($\simeq$) (т.е. совпадение систем с точностью до переименования их компонент).

Другая группа понятий, обратные-прямые бисимуляционные эквивалентности, основана на идее, что отношение бисимуляции должно требовать взаимного моделирования систем не только в прямом направлении (как обычно), но и при движении в обратном направлении "вдоль" истории их работы. Эти эквивалентности тесно связаны с эквивалентностями логик, имеющих модальности "прошлого".

Такие эквивалентностные понятия были впервые введены в [15]. В рамках систем переходов без невидимых действий была определена интерливинговая обратная-прямая эквивалентность ($\underline{\leftrightarrow}_{ibif}$) и доказано ее совпадение с $\underline{\leftrightarrow}_{i}$. На системах переходов с невидимыми действиями показано, что обратный-прямой вариант ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif}$) интерливинговой τ-бисимуляционной эквивалентности совпадает с $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$.

В [6, 7, 8] были определены новые варианты шаговой ($\underline{\leftrightarrow}_{sbsf}$), ЧС ($\underline{\leftrightarrow}_{pwbpwf}$) и ЧУММ ($\underline{\leftrightarrow}_{pombpomf}$) обратных-прямых бисимуляционных эквивалентностей мест в рамках структур событий без невидимых действий.

В [19] появилась новая идея о том, что типы прямого и обратного моделирования могут различаться (в соответствии с этой идеей можно, например, определить шаговую обратную ЧУММ прямую бисимуляционную эквивалентность). Было введено множество всех возможных обратных-прямых эквивалентностных понятий в интерливинговой, шаговой, ЧС и ЧУММ семантиках для структур событий без невидимых действий. Новое отношение τ-эквивалентности было определено на структурах событий с невидимыми действиями: ЧУММ обратная ЧУММ прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf}$) τ-бисимуляционная эквивалентность. Доказано ее совпадение с $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}$.

Для выбора наиболее подходящей точки зрения на моделируемые системы очень важно иметь достаточно полный набор эквивалентностных понятий во всех основных семантиках, а также понимать взаимосвязи этих эквивалентностей. Эту область исследований обычно называют "сравнительная семантика параллелизма". Для выяснения природы эквивалентностных отношений и оценки того, в какой степени они учитывают внутреннюю активность и параллелизм моделируемых систем, необходимо также рассмотреть взаимосвязи эквивалентностей на сетях без невидимых переходов и свободных от параллелизма (последовательных) сетях. Исследование сохранения эквивалентностных понятий при детализациях позволяет решить, какие из этих отношений могут быть использованы при разработке систем по методу "сверху-вниз".

В данной работе, в рамках сетей Петри с невидимыми действиями, мы продолжаем исследования, начатые в [20, 21, 22]. Мы расширяем множество базисных понятий τ-эквивалентностей посредством интерливинговой ST-ветвистой τ-бисимуляционной ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}$), ЧУММ сохраняющей историю ST-ветвистой τ-бисимуляционной ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}$) эквивалентностей и эквивалентностью мультиструктур событий ($\equiv^{\tau}_{mes}$). Заметим, что, первоначально, идея ввести $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}$ возникла в [19] на модели структур событий. Мы дополняем обратные-прямые τ-эквивалентности из [19] шестью новыми понятиями: интерливинговая обратная шаговая прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf}$), интерливинговая обратная ЧС прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpwf}$), интерливинговая обратная ЧУММ прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpomf}$), шаговая обратная шаговая прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf}$), шаговая обратная ЧС прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpwf}$) и шаговая обратная ЧУММ прямая ($\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpomf}$) τ-бисимуляционные эквивалентности. Мы проводим сравнение всех обратных-прямых τ-эквивалентостей с множеством базисных поведенческих отношений.

Мы также исследуем взаимосвязи всех рассмотренных τ-эквивалентостей с эквивалентностями, не абстрагирующимися от невидимых действий.

В работе [5] был веведен оператор SM-детализации для сетей Петри, заменяющий их переходы на SM-сети из специального подкласса автоматных сетей. Мы проверяем все рассмотренные понятия τ-эквивалентностей на сохранение при SM-детализациях и показываем, что $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}$, $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}$ и $\equiv^{\tau}_{mes}$, т.е.

все новые базисные эквивалентости, рассмотренные в данной работе, сохраняются при SM-детализациях. Таким образом, мы получили ветвистые и сохраняющие историю отношения, которые могут быть использованы для многоступенчатой разработки параллельных систем. В литературе, стабильность относительно SM-детализаций была доказана только для $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST}$ в [5] и для $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}$ в [10]. Аналогичный результат для других ST-τ-бисимуляционных эквивалентностей был получен в [24], но это было сделно на структурах событий, и использовался другой оператор детализации. Сохранение следовых τ-эквивалентностей при детализациях вообще не было установлено ранее. Таким образом, наши результаты для $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwST}$, $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomST}$, $\equiv^{\tau}_{pw}$ и $\equiv^{\tau}_{pom}$ также новы.

В дополнение к этому, мы изучаем взаимосвязи всех понятий τ-эквивалентностей на сетях без невидимых переходов и последовательных сетях. Мы доказываем, что на сетях без невидимых перходов τ-эквивалентности совпадают с соответствующими отношениями, не абстрагирующимися от невидимых действий. Далее, на последовательных сетях, мы демонстрируем совпадение интерливинговой и ЧУММ τ-эквивалентностей, а также обратных-прямых и обычных, "прямых", τ-отношений.

Оставшаяся часть статьи построена следующим образом. Основные определения даются в разделе 2. В разделе 3 мы вводим базисные τ-эквивалентности и исследуем их взаимосвязи. В разделе 4 определяются обратные-прямые τ-бисимуляционные эквивалентности, и проводится их сравнение с базисными τ-эквивалентностями. Все рассмотренные τ-эквивалентности сравниваются с отношениями, не абстрагирующимися от невидимых действий, в разделе 5. В разделе 6 мы устаналиваем, какие из отношений τ-эквивалентностей сохраняются при SM-детализациях. Раздел 7 посвящен изучению взаимосвязей τ-эквивалентностей на сетях без невидимых переходов и последовательных сетях. Заключительный раздел 8 содержит обзор основных полученных резльтатов и направления дальнейших исследований.

2 Основные определения

В этом разделе мы приводим основные определения, используемые в дальнейшем.

2.1 Мультимножества

Мультимножество — расширение понятия множества допущением в нем нескольких одинаковых элементов.

Определение 2.1 *Пусть X — некоторое множество. Конечное* мультимножество *M над X — отображение $M : X \to \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел) такое, что $|\{x \in X \mid M(x) > 0\}| < \infty$.*

Обозначим через $\mathcal{M}(X)$ *множество всех конечных мультимножеств* над X. Для $x \in X$ $M(x)$ — *кратность* x в M. Когда $\forall x \in X$ $M(x) \leq 1$, M — обычное множество. *Мощность* мультимножества M определяется так: $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$. Пишем $x \in M$, если $M(x) > 0$ и $M \subseteq M'$, если $\forall x \in X$ $M(x) \leq M'(x)$. Определим $(M + M')(x) = M(x) + M'(x)$ и $(M - M')(x) = \max\{0, M(x) - M'(x)\}$. Символ $\emptyset$ обозначает пустое мультимножество.

2.2 Помеченные сети

Помеченная сеть — сеть Петри, переходы которой помечены именами определенных действий (типам активности).

Пусть $Act = \{a, b, \ldots\}$ — множество имен *действий (меток)*. Символ $\tau \notin Act$ обозначает специальное *невидимое* действие, которое служит для отражения внутренней активности моделируемой системы и не воспринимается внешним наблюдателем. Обозначим также $Act_\tau = Act \cup \{\tau\}$.

Определение 2.2 Помеченная сеть *— четверка $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$, где:*

- $P_N = \{p, q, \ldots\}$ *— множество* мест*;*
- $T_N = \{t, u, \ldots\}$ *— множество* переходов*;*
- $F_N : (P_N \times T_N) \cup (T_N \times P_N) \to \mathbf{N}$ *— функция* инцидентности *с весами;*
- $l_N : T_N \to Act_\tau$ *—* пометка *переходов именами действий.*

Даны помеченные сети $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$ и $N' = \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'} \rangle$. Отображение $\beta : P_N \cup T_N \to P_{N'} \cup T_{N'}$ — *изоморфизм* между N и N', обозначение $\beta : N \simeq N'$, если:

1. β — биекция такая, что $\beta(P_N) = P_{N'}$ и $\beta(T_N) = T_{N'}$;
2. $\forall p \in P_N\ \forall t \in T_N\ F_N(p,t) = F_{N'}(\beta(p), \beta(t))$ and $F_N(t,p) = F_{N'}(\beta(t), \beta(p))$;
3. $\forall t \in T_N\ l_N(t) = l_{N'}(\beta(t))$.

Помеченные сети N и N' *изоморфны*, обозначение $N \simeq N'$, если $\exists \beta : N \simeq N'$.

Пусть дана помеченная сеть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$ и некоторый переход $t \in T_N$. *Предусловие* и *постусловие* t, обозначаемые соответственно ${}^\bullet t$ и $t^\bullet$, — это мультимножества, которые определяются следующим образом: $({}^\bullet t)(p) = F_N(p,t)$ и $(t^\bullet)(p) = F_N(t,p)$. Аналогичные понятия введем для мест: $({}^\bullet p)(t) = F_N(t,p)$ и $(p^\bullet)(t) = F_N(p,t)$. Введем также следующие обозначения: ${}^\circ N = \{p \in P_N \mid {}^\bullet p = \emptyset\}$ — множество *начальных (входных)* мест N и $N^\circ = \{p \in P_N \mid p^\bullet = \emptyset\}$ — множество *конечных (выходных)* мест N.

Помеченная сеть N — *ациклическая*, если в ней не существует множества переходов $\{t_0, \ldots, t_n\} \subseteq T_N$ такого, что $t_{i-1}^\bullet \cap {}^\bullet t_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)$ и $t_0 = t_n$. Помеченная сеть N — *ординарная*, если $\forall t \in T_N$ ${}^\bullet t$ и $t^\bullet$ — обычные множества (а не мультимножества).

Пусть $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$ — ациклическая ординарная помеченная сеть и $x, y \in P_N \cup T_N$. Введем следующие понятия.

- $x \prec_N y \ \Leftrightarrow\ x F_N^\star y$, где $F_N^\star$ — транзитивное замыкание отношения F_N (отношение *строгой причинной зависимости*);
- $x \preceq_N y \ \Leftrightarrow\ (x \prec_N y) \vee (x = y)$ (отношение *причинной зависимости*);
- $x \#_N y \ \Leftrightarrow\ \exists t, u \in T_N\ (t \neq u,\ {}^\bullet t \cap {}^\bullet u \neq \emptyset,\ t \preceq_N x,\ u \preceq_N y)$ (отношение *конфликта*);
- $\downarrow_N x = \{y \in P_N \cup T_N \mid y \prec_N x\}$ (множество *строгих предшественников* x).

Множество $T \subseteq T_N$ *замкнуто влево* в N, если $\forall t \in T\ (\downarrow_N t) \cap T_N \subseteq T$.

2.3 Маркированные сети

Маркированная сеть — помеченная сеть, содержащая активные элементы, называемые “фишками” или “маркерами”, в своих местах. Эти места считаются “маркированными”. Поведение маркированной сети определяеся в соответствии с перемещением маркеров по особым правилам “игры в фишки”.

Маркировка помеченной сети N — мультимножество $M \in \mathcal{M}(P_N)$.

Определение 2.3 (Маркированная) сеть — *пятерка* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$, *где* $\langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle$ — *помеченная сеть и* $M_N \in \mathcal{M}(P_N)$ — начальная *маркировка.*

Даны сети $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ и $N' = \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'}, M_{N'} \rangle$. Отображение $\beta : P_N \cup T_N \to P_{N'} \cup T_{N'}$ — *изоморфизм* между N и N', обозначение $\beta : N \simeq N'$, если:

1. $\beta : \langle P_N, T_N, F_N, l_N \rangle \simeq \langle P_{N'}, T_{N'}, F_{N'}, l_{N'} \rangle$;
2. $\forall p \in P_N\ M_N(p) = M_{N'}(\beta(p))$.

Сети N и N' *изоморфны*, обозначение $N \simeq N'$, если $\exists \beta : N \simeq N'$.

Пусть $M \in \mathcal{M}(P_N)$ — маркировка сети N. Переход $t \in T_N$ *допустим* в M, если ${}^\bullet t \subseteq M$. Если t допустим в M, то срабатывание этого перехода изменяет маркировку M на $\widetilde{M} = M - {}^\bullet t + t^\bullet$, запись $M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$. Маркировка $\widetilde{M}$ сети N — *достижимая*, если $\widetilde{M} = M_N$ или существуют достижимая маркировка $\widehat{M}$ сети N такая, что $\widehat{M} \to \widetilde{M}$. Обозначим через $Mark(N)$ *множество всех достижимых* маркировок сети N.

2.4 Частично упорядоченные множества

Частично упорядоченные множество — особый формализм, используемый в качестве семантического описания параллельных систем. Он позволяет специфицировать причинно-следственные связи событий моделируемой системы. Параллелизм трактуется как причинная независимость.

Определение 2.4 Помеченное частично упорядоченное множество (ПЧУМ) — *тройка* $\rho = \langle X, \prec, l \rangle$, *где:*

- $X = \{x, y, \dots\}$ — *множество* событий*;*
- $\prec \subseteq X \times X$ — *строгий частичный порядок (иррефлексивное транзитивное отношение) над* X*, отношение* причинной зависимости*;*
- $l : X \to Act_\tau$ — *функция* пометки.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l \rangle$ — ПЧУМ и $X, Y \subseteq X$. Тогда $\downarrow x = \{y \in X \mid y \prec x\}$ — множество *строгих предшественников* x. *Ограничение* ПЧУМ ρ на множество Y — ПЧУМ $\rho|_Y = \langle Y, \prec \cap (Y \times Y), l|_Y \rangle$.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l \rangle$ и $\rho' = \langle X', \prec', l' \rangle$ — ПЧУМ.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *сохраняющая пометку биекция* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \asymp \rho'$, если:

1. β — биекция;
2. $\forall x \in X\ l(x) = l'(\beta(x))$.

Пишем $\rho \asymp \rho'$, если $\exists \beta : \rho \asymp \rho'$.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *гомоморфизм* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \sqsubseteq \rho'$, если:

1. $\beta : \rho \asymp \rho'$;
2. $\forall x, y \in X\ x \prec y \ \Rightarrow\ \beta(x) \prec' \beta(y)$.

Пишем $\rho \sqsubseteq \rho'$, если $\exists \beta : \rho \sqsubseteq \rho'$.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *изоморфизм* между ρ и ρ', обозначение $\beta : \rho \simeq \rho'$, если $\beta : \rho \sqsubseteq \rho'$ и $\beta^{-1} : \rho' \sqsubseteq \rho$. ПЧУМ ρ и ρ' *изоморфны*, запись $\rho \simeq \rho'$, если $\exists \beta : \rho \simeq \rho'$.

Определение 2.5 Частично упорядоченное мультимножество (ЧУММ) — *класс изоморфизма ПЧУМ.*

2.5 Структуры событий

Структура событий — расширение понятия ЧУМ посредством возможности спецификации конфликтов событий, то есть ситуаций, когда одно из них исключает другое.

Определение 2.6 Помеченная структура событий (ПСС) — *четверка* $\xi = \langle X, \prec, \#, l \rangle$*, где:*

- $X = \{x, y, \dots\}$ — *множество* событий*;*
- $\prec \subseteq X \times X$ — *строгий частичный порядок над* X*, отношение* причинной зависимости*, удовлетворяющее принципу* конечности причин*:* $\forall x \in X\ |\downarrow x| < \infty$*;*
- $\# \subseteq X \times X$ — *иррефлексивное симметричное отношение* конфликта*, удовлетворяющее принципу* наследования конфликта*:* $\forall x, y, z \in X\ x \# y \prec z \ \Rightarrow\ x \# z$*;*
- $l : X \to Act_\tau$ — *функция* пометки.

Пусть $\xi = \langle X, \prec, \#, l \rangle$ — ПСС и $Y \subseteq X$. *Ограничение* ПСС ξ на множество Y — ПСС $\xi|_Y = \langle Y, \prec \cap (Y \times Y), \# \cap (Y \times Y), l|_Y \rangle$.

Пусть $\xi = \langle X, \prec, \#, l \rangle$ и $\xi' = \langle X', \prec', \#', l' \rangle$ — ПСС.

Отображение $\beta : X \to X'$ — *изоморфизм* между ξ и ξ', обозначение $\beta : \xi \simeq \xi'$, если:

1. $\beta : \langle X, \prec, l \rangle \simeq \langle X', \prec', l' \rangle$;
2. $\forall x, y \in X\ x \# y \ \Leftrightarrow\ \beta(x) \#' \beta(y)$.

ПСС ξ и ξ', запись $\xi \simeq \xi'$, если $\exists \beta : \xi \simeq \xi'$.

Определение 2.7 Мультиструктура событий (МСС) — *класс изоморфизма ПСС.*

2.6 Процессы

Процесс [4] — формализм, описывающий один из возможных путей вычислений моделируемой системы. Обычно, процессы являются детерминированными, так как в вычислении никакие два события не могут находиться в конфликте (все они случаются).

Определение 2.8 С-сеть — *ациклическая ординарная помеченная сеть* $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C \rangle$ *такая, что:*

1. $\forall r \in P_C \ |{}^\bullet r| \leq 1$ *и* $|r^\bullet| \leq 1$, *то есть места не разветвлены;*
2. $\forall x \in P_C \cup T_C \mid \downarrow_C x| < \infty$, *то есть множество причин конечно.*

Заметим, что любой С-сети $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C \rangle$ можно сопоставить ПЧУМ $\rho_C = \langle T_C, \prec_C \cap (T_C \times T_C), l_C \rangle$.

Известно [2] фундаментальное свойство С-сетей: для С-сети C существует последовательность срабатываний переходов ${}^\circ C = L_0 \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_n} L_n = C^\circ$ такая, что $L_i \subseteq P_C$ $(0 \leq i \leq n)$, $P_C = \cup_{i=0}^n L_i$ и $T_C = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Такую последовательность называется *полным выполнением* C.

Определение 2.9 *Даны сеть* N *и С-сеть* C. *Отображение* $\varphi : P_C \cup T_C \to P_N \cup T_N$ — встраивание C *в* N, *обозначение* $\varphi : C \to N$, *если:*

1. $\varphi(P_C) \in \mathcal{M}(P_N)$ *и* $\varphi(T_C) \in \mathcal{M}(T_N)$, *то есть сохраняются сорта;*
2. $\forall v \in T_C \ {}^\bullet\varphi(v) = \varphi({}^\bullet v)$ *и* $\varphi(v)^\bullet = \varphi(v^\bullet)$, *то есть учитывается отношение инцидентности;*
3. $\forall v \in T_C \ l_C(v) = l_N(\varphi(v))$, *то есть сохраняется пометка.*

Так как встраивание учитывает отношение инцидентности, имеет место следующий факт. Если ${}^\circ C \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_n} C^\circ$ — полное выполнение C, то $M = \varphi({}^\circ C) \xrightarrow{\varphi(v_1)} \cdots \xrightarrow{\varphi(v_n)} \varphi(C^\circ) = \widetilde{M}$ — последовательность срабатываний переходов в N.

Определение 2.10 Процесс, допустимый в маркировке M *сети* N — *пара* $\pi = (C, \varphi)$, *где* C — *С-сеть и* $\varphi : C \to N$ — *встраивание такое, что* $M = \varphi({}^\circ C)$. *Допустимый в* M_N *процесс* — процесс N.

Обозначим множество всех *процессов, допустимых в маркировке* M сети N через $\Pi(N, M)$ и множество всех *процессов* сети N через $\Pi(N)$. *Начальный* процесс сети N — это процесс $\pi_N = (C_N, \varphi_N) \in \Pi(N)$ такой, что $T_{C_N} = \emptyset$. Если $\pi \in \Pi(N, M)$, то срабатывание этого процесса меняет маркировку M на $\widetilde{M} = M - \varphi({}^\circ C) + \varphi(C^\circ) = \varphi(C^\circ)$, обозначение $M \xrightarrow{\pi} \widetilde{M}$.

Пусть $\pi = (C, \varphi)$, $\tilde{\pi} = (\widetilde{C}, \tilde{\varphi}) \in \Pi(N)$, $\hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi}) \in \Pi(N, \varphi(C^\circ))$. Процесс π — *префикс* процесса $\tilde{\pi}$, если $T_C \subseteq T_{\widetilde{C}}$ — замкнутое влево множество в $\widetilde{C}$. Процесс $\hat{\pi}$ — *суффикс* процесса $\tilde{\pi}$, если $T_{\widehat{C}} = T_{\widetilde{C}} \setminus T_C$. Тогда $\tilde{\pi}$ — *расширение* π *на процесс* $\hat{\pi}$, а $\hat{\pi}$ — *расширяющий* процесс для π, запись $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$. Пишем $\pi \to \tilde{\pi}$, если $\exists \hat{\pi} \ \pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$.

Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение процесса π *на одно действие*, запись $\pi \xrightarrow{v} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{a} \tilde{\pi}$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, $T_{\widehat{C}} = \{v\}$ и $l_{\widehat{C}}(v) = a$.

Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение процесса π *на последовательность действий*, запись $\pi \xrightarrow{\sigma} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{\omega} \tilde{\pi}$, если $\exists \pi_i \in \Pi(N)$, $\exists v_i \in T_{\widetilde{C}}$ $(1 \leq i \leq n)$ $\pi \xrightarrow{v_1} \pi_1 \xrightarrow{v_2} \ldots \xrightarrow{v_n} \pi_n = \tilde{\pi}$, $\sigma = v_1 \cdots v_n$ и $l_{\widehat{C}}(\sigma) = \omega$.

Процесс $\tilde{\pi}$ — расширение π *на мультимножество действий* или *шаг*, запись $\pi \xrightarrow{V} \tilde{\pi}$ или $\pi \xrightarrow{A} \tilde{\pi}$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$, $\prec_{\widehat{C}} = \emptyset$, $T_{\widehat{C}} = V$ и $l_{\widehat{C}}(V) = A$.

2.7 Ветвистые процессы

Ветвистый процесс [11] — расширение понятия (обычного, детерминованного) процесса возможностью существования в нем конфликтных событий. Таким образом, ветвистый процесс можно рассматривать как объединение различных вычислений, дающе возможность наблюдать все взаимные влияния событий и учитывать на равной основе как причинность, так и недетерминизм.

Определение 2.11 О-сеть — *ациклическая ординарная помеченная сеть* $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$, *такая, что:*

1. $\forall r \in P_O \; |{}^\bullet r| \leq 1$, *то есть нет обратых конфликтов;*

2. $\forall x \in P_O \cup T_O \; \neg(x \#_O x)$, *то есть отношение конфликта иррефлексивно;*

3. $\forall x \in P_O \cup T_O \; |\downarrow_O x| < \infty$, *то есть множество причин конечно.*

Заметим, что любой О-сети $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$ можно сопоставить ПСС $\xi_O = \langle T_O, \prec_O \cap (T_O \times T_O), \#_O \cap (T_O \times T_O), l_O \rangle$.

Пусть $O = \langle P_O, T_O, F_O, l_O \rangle$ — О-сеть и $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N \rangle$ — сеть.

Определение 2.12 *Отображение* $\psi : P_O \cup T_O \to P_N \cup T_N$ *—* встраивание *O в N, запись $\psi : O \to N$, если выполняются следующие условия.*

1. $\psi(P_O) \in \mathcal{M}(P_N)$ *и* $\psi(T_O) \in \mathcal{M}(T_N)$, *то есть сохраняются сорта;*

2. $\forall v \in T_O \; l_O(v) = l_N(\psi(v))$, *то есть сохраняется пометка;*

3. $\forall v \in T_O \; {}^\bullet\psi(v) = \psi({}^\bullet v)$ *и* $\psi(v)^\bullet = \psi(v^\bullet)$, *то есть учитывается отношение инцидентности;*

4. $\forall v, w \in T_O \; ({}^\bullet v = {}^\bullet w) \wedge (\psi(v) = \psi(w)) \;\Rightarrow\; v = w$, *то есть нет "лишних" конфликтов.*

Определение 2.13 Ветвистый процесс *сети N — пара $\varpi = (O, \psi)$, где O — О-сеть, а $\psi : O \to N$ — встраивание такое, что $M_N = \psi({}^\circ O)$.*

Обозначим множество всех *О-процессов* сети N через $\wp(N)$. *Начальный* О-процесс сети N совпадает с начальным С-процессом, то есть $\varpi_N = \pi_N$.

Пусть $\varpi = (O, \psi)$, $\tilde{\varpi} = (\widetilde{O}, \tilde{\psi}) \in \wp(N)$. О-процесс ϖ — *префикс* О-процесса $\tilde{\varpi}$, если $T_O \subseteq T_{\widetilde{O}}$ — замкнутое влево множество в $\widetilde{O}$. Тогда $\tilde{\varpi}$ — *расширение* О-процесса ϖ, обозначение $\varpi \to \tilde{\varpi}$.

О-процесс ϖ сети N — *максимальный*, если $\forall \tilde{\varpi} = (\widetilde{O}, \tilde{\psi}) \in \wp(N)$ таких, что $\varpi \to \tilde{\varpi}$ выполняется $T_{\widetilde{O}} \setminus T_O = \emptyset$. Множество всех *максимальных О-процессов* сети N состоит из единственного О-процесса $\varpi_{max} = (O_{max}, \psi_{max})$. В этом случае класс изоморфизма О-сети O_{max} — *развертка* сети N, обозначение $\mathcal{U}(N)$. Развертке $\mathcal{U}(N)$ соответствует МСС $\mathcal{E}(N) = \xi_{\mathcal{U}(N)}$ — класс изоморфизма ПСС ξ_O для $O \in \mathcal{U}(N)$.

3 Базисные τ-эквивалентности

В этом разделе мы вводим базисные τ-эквивалентности: следовые, бисимуляционные и сохраняющие конфликт. Они формируют основной "каркас" эквивалентностных отношений, используемую в дальнейшем.

3.1 τ-следовые эквивалентности

τ-следовые эквивалентности — простейшие отношения. В следовой семантике поведение системы ассоциируется с множеством всех возможных последовательностей действий, то есть с протоколами вычислений. Таким образом, не учитываются точки недетерминированного выбора между несколькими расширениями определенного вычисления.

Введем формальные определения следовых отношений.

Обозначим через ε *пустую строку.*

Пусть $\sigma = a_1 \cdots a_n \in Act_\tau^*$. Определим $vis(\sigma)$ следующим образом (в следующем определении $a \in Act_\tau$).

1. $vis(\varepsilon) = \varepsilon$;

2. $vis(\sigma a) \begin{cases} vis(\sigma)a, & a \in Act; \\ vis(\sigma), & \text{иначе.} \end{cases}$

Определение 3.1 Видимый интерливинговый след *сети N — это последовательность $vis(a_1 \cdots a_n) \in Act^*$ такая, что $\pi_N \xrightarrow{a_1} \pi_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} \pi_n$, где $\pi_i \in \Pi(N)$ $(1 \leq i \leq n)$. Обозначим* множество всех видимых интерливинговых следов *сети N через $VisIntTraces(N)$. Сети N и N'* интерливингово τ-следово эквивалентны*, запись $N \equiv_i^\tau N'$, если $VisIntTraces(N) = VisIntTraces(N')$.*

Пусть $\Sigma = A_1 \cdots A_n \in (\mathcal{M}(Act_\tau))^*$. Определим $vis(\Sigma)$ следующим образом (в следующем определении $A \in \mathcal{M}(Act_\tau)$).

1. $vis(\varepsilon) = \varepsilon$;

2. $vis(\Sigma A) \begin{cases} vis(\Sigma)(A \cap Act), & A \cap Act \neq \emptyset; \\ vis(\Sigma), & \text{иначе.} \end{cases}$

Определение 3.2 Видимый шаговый след *сети* N *— это последовательность* $vis(A_1 \cdots A_n) \in (\mathcal{M}(Act))^*$ *такая, что* $\pi_N \xrightarrow{A_1} \pi_1 \xrightarrow{A_2} \ldots \xrightarrow{A_n} \pi_n$, *где* $\pi_i \in \Pi(N)$ $(1 \leq i \leq n)$. *Обозначим* множество всех видимых шаговых следов *сети* N *через* $VisStepTraces(N)$. *Сети* N *и* N' шагово τ-следово эквивалентны, *запись* $N \equiv_s^\tau N'$, *если* $VisStepTraces(N) = VisStepTraces(N')$.

Пусть $\rho = \langle X, \prec, l\rangle$ — ПЧУМ такой, что $l : X \to Act_\tau$. Обозначим $vis(X) = \{x \in X \mid l(x) \in Act\}$ и $vis(\rho) = \rho|_{vis(X)}$.

Определение 3.3 Видимый ЧУММ след *сети* N *— это ЧУММ* $vis(\rho)$ *— класс изоморфизма ПЧУМ* $vis(\rho_C)$ *для* $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$. *Обозначим через* $VisPomsets(N)$ множество всех видимых ЧУММ следов *сети* N. *Сети* N *и* N' τ-следово эквивалентны ЧС (ЧС), *запись* $N \equiv_{pw}^\tau N'$, *если* $VisPomsets(N) \sqsubseteq VisPomsets(N')$ *и* $VisPomsets(N') \sqsubseteq VisPomsets(N)$.

Определение 3.4 *Сети* N *и* N' ЧУММ τ-следово эквивалентны, *запись* $N \equiv_{pom}^\tau N'$, *если* $VisPomsets(N) = VisPomsets(N')$.

3.2 τ-бисимуляционные эквивалентности

Бисимуляционные эквивалентности, в отличие от следовых отношений, полностью учитывают точки недетерминированного выбора в поведении моделируемой системы.

Пусть $C = \langle P_C, T_C, F_C, l_C\rangle$ — C-сеть. Обозначим $vis(T_C) = \{v \in T_C \mid l_C(v) \in Act\}$ и $vis(\prec_C) = \prec_C \cap (vis(T_C) \times vis(T_C))$.

3.2.1 Обычные τ-бисимуляционные эквивалентности

Обычные бисимуляционные эквивалентности — самые простые (и слабые) отношения в бисимуляционной семантике. Они требуют взаимного моделирования тех частей "новых" вычислений, которые расширяют "текущие", то есть "расширяющих" частей.

Определение 3.5 *Пусть* N *и* N' *— некоторые сети. Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N')$ *—* $\star$-τ-бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in\{$интерливингивая, шаговая, ЧС, ЧУММ$\}$, *запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star^\tau N'$, $\star \in \{i, s, pw, pom\}$, *если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}) \in \mathcal{R}$.

2. $(\pi, \pi') \in \mathcal{R}$, $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$,

   (a) $|vis(T_{\widehat{C}})| = 1$, *если* $\star = i$;
   (b) $vis(\prec_{\widehat{C}}) = \emptyset$, *если* $\star = s$;

   $\Rightarrow$ $\exists \tilde{\pi}' :$ $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$, $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in \mathcal{R}$ *и*

   (a) $vis(\rho_{\widehat{C}'}) \sqsubseteq vis(\rho_{\widehat{C}})$, *если* $\star = pw$;
   (b) $vis(\rho_{\widehat{C}}) \simeq vis(\rho_{\widehat{C}'})$, *если* $\star \in \{i, s, pom\}$.

3. Как пункт 2, но роли N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-τ-бисимуляционно эквивалентны, $\star \in\{$интерливингивая, шаговая, ЧС, ЧУММ$\}$, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}_\star^\tau N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_\star^\tau N'$, $\star \in \{i, s, pw, pom\}$.

3.2.2 ST-τ-бисимуляционные эквивалентности

ST-бисимуляционные эквивалентности учитывают (в некотором смысле) длительность событий в вычислениях в предположении, что они не являются мгновенными, а имеют начало и конец. Эти отношения требуют взаимного моделирования расширяющих частей вычислений *плюс* частей, состоящих из событий, которые происходят в текущий момент времени (то есть начались, но пока не закончились).

Начнем с определения ST-процесса, который представляет из себя специальную структуру, содержащую информацию как о причинной зависимости событий в текущем вычислении, так и о событиях, которые уже произошли.

Определение 3.6 ST-τ-процесс *сети* N *— пара* (π_E, π_P) *такая, что* $\pi_E, \pi_P \in \Pi(N)$, $\pi_P \stackrel{\pi_W}{\to} \pi_E$ *и* $\forall v, w \in T_{C_E}\ (v \prec_{C_E} w) \vee (l_{C_E}(v) = \tau) \ \Rightarrow\ v \in T_{C_P}$.

В этом случае π_E — процесс, начавший работать, то есть все действия π_E начали выполняться. Процесс π_P соответствует завершенной части π_E, а π_W — еще работающей. Очевидно, $\prec_{C_W} = \emptyset$. $ST^\tau - \Pi(N)$ обозначает *множество всех ST-τ-процессов* сети N. (π_N, π_N) будет *начальным ST-τ-процессом* N. Пусть $(\pi_E, \pi_P),\ (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \in ST^\tau - \Pi(N)$. Пишем $(\pi_E, \pi_P) \to (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)$, если $\pi_E \to \tilde{\pi}_E$ и $\pi_P \to \tilde{\pi}_P$.

Определение 3.7 *Пусть* N *и* N' *— некоторые сети. Отношение* $\mathcal{R} \subseteq ST^\tau - \Pi(N) \times ST^\tau - \Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : vis(T_C) \to vis(T_{C'}),\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ *—* $\star$-ST-τ-бисимуляция *между* N *и* N', $\star \in \{$интерливинговая, ЧС, ЧУММ$\}$, *запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom\}$, *если:*

1. $((\pi_N, \pi_N), (\pi_{N'}, \pi_{N'}), \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \beta : vis(\rho_{C_E}) \asymp vis(\rho_{C'_E})$ *и* $\beta(vis(T_{C_P})) = vis(T_{C'_P})$.
3. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \to (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P) :\ (\pi'_E, \pi'_P) \to (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P),\ \tilde{\beta}|_{vis(T_{C_E})} = \beta,\ ((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$, *и если* $\pi_P \stackrel{\pi}{\to} \tilde{\pi}_E,\ \pi'_P \stackrel{\pi'}{\to} \tilde{\pi}'_E,\ \gamma = \tilde{\beta}|_{T_C}$, *то:*
   (a) $\gamma^{-1} : vis(\rho_{C'}) \sqsubseteq vis(\rho_C)$, *если* $\star = pw$;
   (b) $\gamma : vis(\rho_C) \simeq vis(\rho_{C'})$, *если* $\star = pom$.
4. *Как пункт 3, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' $\star$-ST-τ-бисимуляционно эквивалентны, $\star \in \{$интерливингивая, ЧС, ЧУММ$\}$, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{\star ST} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{\star ST} N'$, $\star \in \{i, pw, pom\}$.

3.2.3 Сохраняющие историю τ-бисимуляционные эквивалентности

Сохраняющие историю бисимуляционные эквивалентности учитывают "истории" работы, то есть требуют взаимного моделирования *целых* вычислений, от начала до конца.

Определение 3.8 *Пусть* N *и* N' *— некоторые сети. Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : vis(T_C) \to vis(T_{C'}),\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ *—* ЧУММ $\star$-сохраняющая историю τ-бисимуляция *между* N *и* N', *запись* $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomh} N'$, *если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}, \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \beta : vis(\rho_C) \simeq vis(\rho_{C'})$.
3. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R},\ \pi \to \tilde{\pi} \ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ \tilde{\pi}' : \pi' \to \tilde{\pi}',\ \tilde{\beta}|_{vis(T_C)} = \beta,\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.
4. *Как пункт 3, но роли* N *и* N' *меняются.*

Сети N *и* N' ЧУММ $\star$-сохраняюще историю τ-бисимуляционно эквивалентны, *запись* $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomh} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomh} N'$.

3.2.4 Сохраняющие историю ST-τ-бисимуляционные эквивалентности

Сохраняющие историю ST-бисимуляционные эквивалентности можно рассматривать как такую модификацию сохраняющих историю отношений, в которой принимаются во внимание начала и концы событий.

Определение 3.9 *Пусть N и N' — некоторые сети. Отношение* $\mathcal{R} \subseteq ST^\tau - \Pi(N) \times ST^\tau - \Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : vis(T_C) \to vis(T_{C'}),\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ — ЧУММ $\star$-сохраняющая историю ST-τ-бисимуляция *между N и N', запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{pomhST} N'$, *если:*

1. $((\pi_N, \pi_N), (\pi_{N'}, \pi_{N'}), \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \beta : vis(\rho_{C_E}) \simeq vis(\rho_{C'_E})$ *и* $\beta(vis(T_{C_P})) = vis(T_{C'_P})$.
3. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \to (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \ \Rightarrow\ \exists \tilde{\beta},\ (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P) :\ (\pi'_E, \pi'_P) \to (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P),\ \tilde{\beta}|_{vis(T_{C_E})} = \beta,\ ((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.
4. *Как пункт 3, но роли N и N' меняются.*

Сети N и N' ЧУММ $\star$-сохраняюще историю-ST-τ-бисимуляционно эквивалентны*, запись* $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomhST} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomhST} N'$.

3.2.5 Обычные ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентности

Обычные ветвистые бисимуляционные эквивалентности — простейшие из ветвистых бисимуляционных отношений. Их можно рассматривать как модификации понятия обычной бисимуляции. Слово "ветвистые" используется для того, чтобы показать, что упомянутые эквивалентности "действительно" учитывают все аспекты ветвления, принимая во внимание невидимые действия. Заметим, что "не ветвистые" бисимуляционные отношения не принимают во внимание невидимые действия в точках недетерминированного выбора, но эти действия могут играть важную роль в поведении моделируемой системы.

На рисунке 1 показана различающая способность обычных и ветвистых τ-бисимуляционных эквивалентностей для сетей N и N'. И те, и другие эквивалентности требуют, чтобы отношением бисимуляции были связаны начальные процессы сетей π_N и $\pi_{N'}$. Кроме того, если отношением бисимуляции связаны текущие процессы π и π', и один из них был расширен, то другой тоже можно расширить так, чтобы вторая сеть моделировала поведение первой при абстрагировании от невидимых действий. При этом новые, расширенные процессы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}'$ должны быть также связаны бисимуляцией.

Ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентости сильнее обычных, так как отношением ветвистой τ-бисимуляции должны быть связаны еще некоторые промежуточные процессы. Расширение на невидимое действие τ, представленное на рисунке 1(a), моделируется расширением на последовательность невидимых действий. При этом новый процесс $\tilde{\pi}$ первой сети должен связываться с текущим процессом π' второй. Расширение на видимое действие a, представленное на рисунке 1(b), моделируется расширением на последовательность действий, лишь одно из которых (а именно a) видимое. При этом текущий процесс π должен быть связан с процессом π_1, который достигается непосредственно перед расширением на действие a, а новый процесс $\tilde{\pi}$ — с процессом π_2, который получается непосредственно после этого расширения. Эти дополнительные связи представлены на рисунке 1 наклонными линиями.

Для некоторой сети N и $\pi, \tilde{\pi} \in \Pi(N)$ пишем $\pi \Rightarrow \tilde{\pi}$, когда $\exists \hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi})$ такой, что $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ и $vis(T_{\widehat{C}}) = \emptyset$.

Определение 3.10 *Пусть N и N' — некоторые сети. Отношение* $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N')$ — интерливинговая ветвистая τ-бисимуляция *между N и N', запись* $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{ibr} N'$, *если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi') \in \mathcal{R},\ \pi \xrightarrow{a} \tilde{\pi} \ \Rightarrow$
   (a) $a = \tau$ *и* $(\tilde{\pi}, \pi') \in \mathcal{R}$ *или*
   (b) $a \neq \tau$ *и* $\exists \bar{\pi}',\ \tilde{\pi}' : \pi' \Rightarrow \bar{\pi}' \xrightarrow{a} \tilde{\pi}',\ (\pi, \bar{\pi}') \in \mathcal{R},\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in \mathcal{R}$.
3. *Как пункт 2, но роли N и N' меняются.*

Сети N и N' интерливингово ветвисто τ-бисимуляционно эквивалентны*, запись* $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{ibr} N'$, *если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{ibr} N'$.

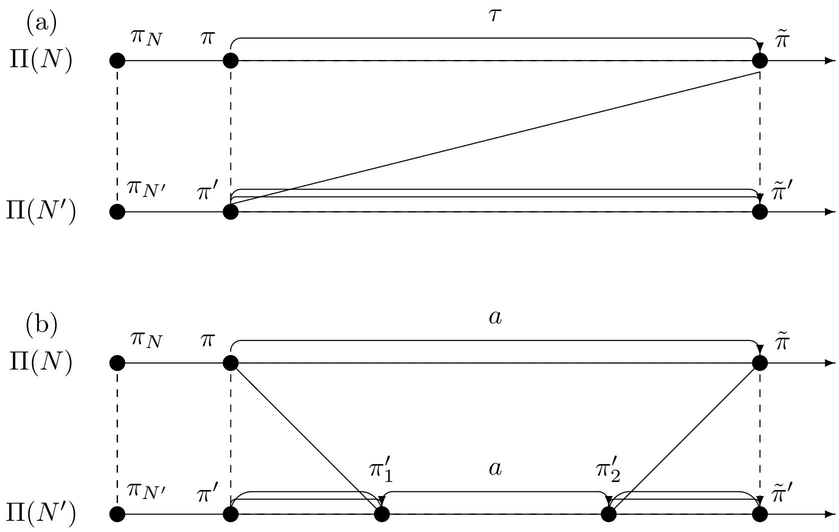

Рис. 1: Различающая способность обычных и ветвистых τ-бисимуляционных эквивалентностей

3.2.6 Сохраняющие историю ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентности

Сохраняющие историю ветвистые бисимуляционные эквивалентности — модификации сохраняющих историю бисимуляционных отношений в соответствии с "ветвистой" идеей.

Определение 3.11 *Пусть N и N' — некоторые сети. Отношение $\mathcal{R} \subseteq \Pi(N) \times \Pi(N') \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : T_C \to T_{C'},\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$, —* ЧУММ сохраняющая историю ветвистая τ-бисимуляция *между N и N', запись $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} N'$, если:*

1. $(\pi_N, \pi_{N'}, \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \beta : vis(\rho_C) \simeq vis(\rho_{C'})$.
3. $(\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R},\ \pi \to \tilde{\pi} \ \Rightarrow$
   - (a) $(\tilde{\pi}, \pi', \beta) \in \mathcal{R}$ *или*
   - (b) $\exists \tilde{\beta},\ \bar{\pi}',\ \tilde{\pi}' : \pi' \Rightarrow \bar{\pi}' \to \tilde{\pi}',\ \tilde{\beta}|_{vis(T_C)} = \beta,\ (\pi, \bar{\pi}', \beta) \in \mathcal{R},\ (\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.
4. *Как пункт 3, но роли N и N' меняются.*

Сети N и N' ЧУММ сохраняюще историю ветвисто τ-бисимуляционно эквивалентны*, запись $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} N'$, если $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} N'$.*

3.2.7 ST-ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентности

ST-ветвистые бисимуляционные эквивалентности — модификации ST-бисимуляционных отношений в соответствии с "ветвистой" идеей.

Пусть $(\pi_E, \pi_P),\ (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \in ST^{\tau} - \Pi(N)$. Пишем $(\pi_E, \pi_P) \Rightarrow (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)$, если $\pi_E \Rightarrow \tilde{\pi}_E$ и $\pi_P \Rightarrow \tilde{\pi}_P$.

Определение 3.12 *Пусть N и N' — некоторые сети. Отношение $\mathcal{R} \subseteq ST^{\tau} - \Pi(N) \times ST^{\tau} - \Pi(N') \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : vis(T_C) \to vis(T_{C'}),\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ —* интерливинговая ST-ветвистая τ-бсимуляция *между N и N', запись $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N'$, если:*

1. $((\pi_N, \pi_N), (\pi_{N'}, \pi_{N'}), \emptyset) \in \mathcal{R}$.
2. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \beta : vis(\rho_{C_E}) \asymp vis(\rho_{C'_E})$ *и*
   $\beta(vis(T_{C_P})) = vis(T_{C'_P})$.
3. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \to (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P) \ \Rightarrow$

(a) $((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}$ *или*

(b) $\exists \tilde{\beta},\ (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P),\ (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P):\ (\pi'_E, \pi'_P) \Rightarrow (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P) \rightarrow (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P)$,
$\tilde{\beta}|_{vis(T_{C_E})} = \beta,\ ((\pi_E, \pi_P), (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ ((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.

4. *Как пункт 3, но роли N и N' меняются.*

Сети N и N' интерливингово ST-ветвисто τ-бисимуляционно эквивалентны*, запись* $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N'$*, если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N'$.

3.2.8 Сохраняющие историю ST-ветвистые τ-бисимуляционные эквивалентности

Сохраняющие историю ST-ветвистые бисимуляционные эквивалентности — модификации сохраняющих историю ST-бисимуляционных отношений в соответствии с "ветвистой" идеей.

Определение 3.13 *Пусть N и N' — некоторые сети. Отношение* $\mathcal{R} \subseteq ST^{\tau} - \Pi(N) \times ST^{\tau} - \Pi(N') \times \mathcal{B}$, *где* $\mathcal{B} = \{\beta \mid \beta : vis(T_C) \rightarrow vis(T_{C'}),\ \pi = (C, \varphi) \in \Pi(N),\ \pi' = (C', \varphi') \in \Pi(N')\}$ — сохраняющая историю ST-ветвистая τ-бсимуляция *между N и N', запись* $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$*, если:*

1. $((\pi_N, \pi_N), (\pi_{N'}, \pi_{N'}), \emptyset) \in \mathcal{R}$.

2. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}\ \Rightarrow\ \beta : vis(\rho_{C_E}) \simeq vis(\rho_{C'_E})$ *и*
$\beta(vis(T_{C_P})) = vis(T_{C'_P})$.

3. $((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \rightarrow (\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P)\ \Rightarrow$

   (a) $((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \in \mathcal{R}$ *или*

   (b) $\exists \tilde{\beta},\ (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P),\ (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P):\ (\pi'_E, \pi'_P) \Rightarrow (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P) \rightarrow (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P)$,
   $\tilde{\beta}|_{vis(T_{C_E})} = \beta,\ ((\pi_E, \pi_P), (\bar{\pi}'_E, \bar{\pi}'_P), \beta) \in \mathcal{R},\ ((\tilde{\pi}_E, \tilde{\pi}_P), (\tilde{\pi}'_E, \tilde{\pi}'_P), \tilde{\beta}) \in \mathcal{R}$.

4. *Как пункт 3, но роли N и N' меняются.*

Сети N и N' сохраняюще историю ST-ветвисто τ-бисимуляционно эквивалентны*, запись* $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$*, если* $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$.

3.3 τ-сохраняющие конфликт эквивалентности

Сохраняющие конфликт эквивалентности полностью учитывают конфликты в поведении моделируемых систем. Поведение системы ассоциируется со структурой событий.

Пусть $\xi = \langle X, \prec, \#, l \rangle$ — ПСС такая, что $l : X \rightarrow Act_{\tau}$. Обозначим $vis(X) = \{x \in X \mid l(x) \in Act\}$ и $vis(\xi) = \xi|_{vis(X)}$.

Определение 3.14 Видимый МСС-след *сети N — МСС $vis(\xi)$ — класс изоморфизма ПСС $vis(\xi_O)$ для $\varpi = (O, \psi) \in \wp(N)$. Обозначим через $VisMEStructs(N)$* множество всех видимых МСС-следов *сети N. Сети N и N'* сохраняюще конфликт τ-эквивалентны на МСС*, запись* $N \equiv^{\tau}_{mes} N'$*, если* $VisMEStructs(N) = VisMEStructs(N')$*. Заметим, что, в силу единственности максимального O-процесса, это равносильно требованию* $vis(\mathcal{E}(N)) = vis(\mathcal{E}(N'))$.

3.4 Взаимосвязи базисных τ-эквивалентностей

В этом разделе мы проводим сравнение базисных τ-эквивалентностей и получаем в результате граф их взаимосвязей.

Далее, символом '_' будем обозначать пустую альтернативу. То есть знак, подписанный или надписанный этим символом, будем считать знаком без подписей и надписей.

Теорема 3.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \leftrightarrow\!\!\!\!\leftrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}, \simeq\}$, $\star, \star\star \in \{\_, i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, pomh, pomhST, ibr, pomhbr, iSTbr, pomhSTbr, mes\}$*. Для сетей N и N'* $N \leftrightarrow_{\star} N'\ \Rightarrow\ N \leftrightarrow\!\!\!\!\leftrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда в графе на рисунке 2 существует направленный путь от* $\leftrightarrow_{\star}$ *к* $\leftrightarrow\!\!\!\!\leftrightarrow_{\star\star}$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Проверим истинность импликаций в графе на рисунке 2

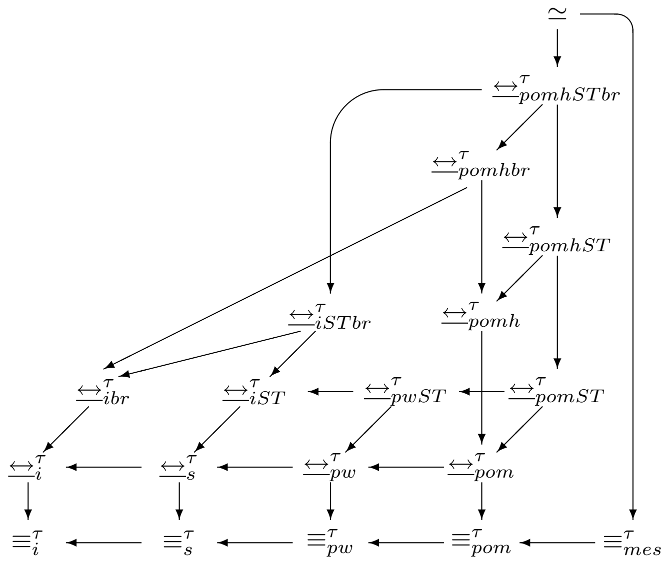

Рис. 2: Взаимосвязи базисных τ-эквивалентностей

- Связи $\leftrightarrow^{\tau}_{s} \to \leftrightarrow^{\tau}_{i}$, $\leftrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}\}$, — следствия того, что изоморфизм ПЧУМ с пустым отношением предшествования является изоморфизмом одноэлементных ПЧУМ.

- Связи $\leftrightarrow^{\tau}_{pw} \to \leftrightarrow^{\tau}_{s}$, $\leftrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}\}$, — следствия того, что гомоморфизм ПЧУМ является изоморфизмом ПЧУМ с пустым отношением предшествования.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwST} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}$ — следствие того, что гомоморфизм ПЧУМ является изоморфизмом одноэлементных ПЧУМ.

- Связи $\leftrightarrow^{\tau}_{pom} \to \leftrightarrow^{\tau}_{pw}$, $\leftrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}\}$, — следствия того, что изоморфизм ПЧУМ является гомоморфизмом.

- Связь $\equiv^{\tau}_{mes} \to \equiv^{\tau}_{pom}$ — следствие того, что множества ЧУММ изоморфных ПСС также изоморфны.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i} \to \equiv^{\tau}_{i}$ доказывается следующим образом. Пусть $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i} N'$. Если $\pi_N \stackrel{a_1}{\to} \pi_1 \stackrel{a_2}{\to} \dots \stackrel{a_n}{\to} \pi_n$, то существует последовательность $(\pi_N, \pi_{N'}), \dots, (\pi_n, \pi'_m) \in \mathcal{R}$ такая, что $\pi_{N'} \stackrel{a'_1}{\to} \pi'_1 \stackrel{a'_2}{\to} \dots \stackrel{a'_m}{\to} \pi'_m$, $vis(a_1 \cdots a_n) = vis(a'_1 \cdots a'_m)$, и наоборот, в силу симметричности бисимуляции.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{s} \to \equiv^{\tau}_{s}$ доказывается, как в предыдущем случае, но с использованием $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}(Act_{\tau})$ вместо $a_1, \dots, a_n \in Act_{\tau}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pw} \to \equiv^{\tau}_{pw}$ доказывается следующим образом. Пусть $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pw} N'$ и $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$. Так как $\pi_N \stackrel{\pi}{\to} \pi$, то существует пара $(\pi, \pi') \in \mathcal{R}$ такая, что $\pi' = (C', \varphi')$ и $vis(\rho_{C'}) \sqsubseteq vis(\rho_C)$. Следовательно, $VisPomsets(N') \sqsubseteq VisPomsets(N)$. Включение $VisPomsets(N) \sqsubseteq VisPomsets(N')$ доказывается аналогично, в силу симметричности бисимуляции.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pom} \to \equiv^{\tau}_{pom}$ доказывается как в предыдущем случае, но с использованием изоморфизма вместо гомоморфизма ПЧУМ.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{s}$ доказывается с использованием того, что шагу $\pi \stackrel{A}{\to} \tilde{\pi}$, где $A = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{M}(Act)$, соответствует последовательность ST-τ-процессов $(\pi_0, \pi_0), \dots, (\pi_n, \pi_0), \dots, (\pi_n, \pi_n)$ такая, что $\pi_0 \stackrel{a_1}{\to} \dots \stackrel{a_n}{\to} \pi_n$.

- Связи $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star ST} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star}$, $\star \in \{pw, pom\}$ доказываются построением на основе отношения $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star ST} N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star} N'$, определяемого следующим образом:
$\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists \beta \; ((\pi, \pi), (\pi', \pi'), \beta) \in \mathcal{R}\}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}$ доказываются построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST}N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}N'$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi', \beta) \mid ((\pi, \pi), (\pi', \pi'), \beta) \in \mathcal{R}\}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pom}$ доказываются построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pom}N'$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists\beta\ ((\pi, \pi), (\pi', \pi'), \beta) \in \mathcal{R}\}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomST}$ следует из определений.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i}$ следует из определений.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}$ следует из определений.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$ доказываются построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}N'$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists\beta\ (\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R}\}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$ доказываются построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}N'$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists\beta\ (\pi, \pi', \beta) \in \mathcal{R}\}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}$ следует из определений.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}$ следует из определений.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}$ доказывается построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}N'$, определяемого следующим образом:
$\mathcal{S} = \{(\pi, \pi', \beta) \mid ((\pi, \pi), (\pi', \pi'), \beta) \in \mathcal{R}\}$.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST}$ следует из определений.

- Связь $\simeq \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}$ очевидна.

- Связь $\simeq \to \equiv^{\tau}_{mes}$ очевидна.

($\Rightarrow$) Отсутствие дополнительных нетривиальных стрелок в графе на рисунке 2 доказывается следующими примерами.

- На рисунке 3(a) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}N'$, но $N \not\equiv^{\tau}_{s} N'$, так как только в сети N' действия a и b не могут сработать параллельно.

- На рисунке 3(c) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}N'$, но $N \not\equiv^{\tau}_{pw} N'$, так как сети N соответствует ЧУММ такое, что даже менее последовательного ЧУММ не может быть выполнено в сети N'.

- На рисунке 3(b) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwST}N'$, но $N \not\equiv^{\tau}_{pom} N'$, так как только в сети N' действие b может зависеть от a.

- На рисунке 5(a) $N \equiv^{\tau}_{mes} N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{i}N'$, так как только в сети N' действие τ может сработать так, что в соответствующем ему начальном состоянии сети N действие a не может выполниться.

- На рисунке 4(a) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pom}N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}N'$, так как только в сети N' действие a может начать работать так, что никакое действие b уже не сможет стартовать до завершения a.

- На рисунке 4(b) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomST}N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}N'$, так как только в сети N' после действия a действие b может сработать так, что действие c должно обязательно зависеть от a.

- На рисунке 5(b) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh}N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}N'$, так как только в сети N' действие a может стартовать так, что b никогда не случится.

- На рисунке 5(c) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST}N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}N'$, так как в сети N' действие a может произойти так, что оно будет сымитировано последовательностью действий τa в N. Тогда состояное сети N, достигаемое после τ, должно быть связано с начальным состоянием сети N, но в этом случае выполнение действия b из начального состояния N' не может быть смоделировано из соответствующего состояния N.

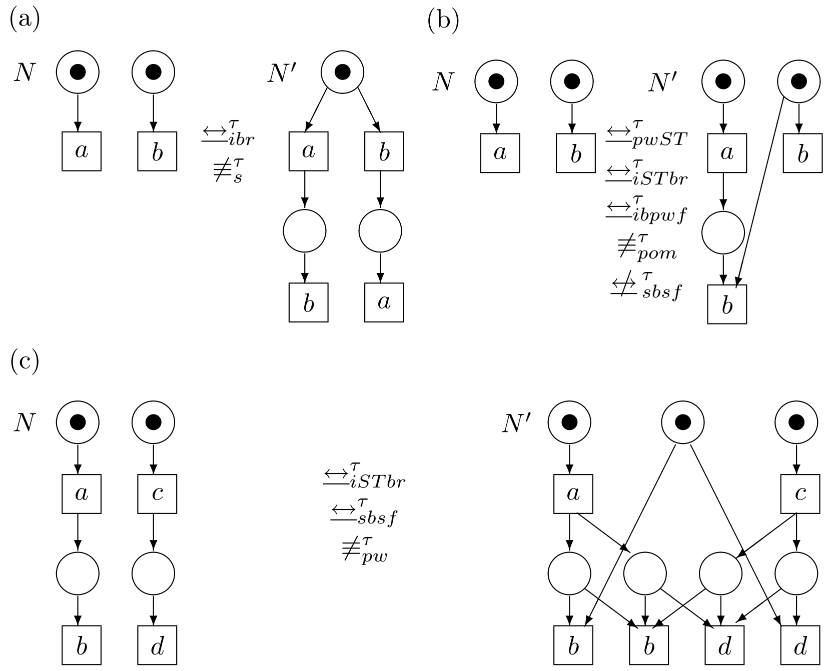

Рис. 3: Примеры базисных τ-эквивалентностей

- На рисунке 5(d) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}N'$, но $N\not\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}N'$, так как в сети N' действие c может стартовать так, что в течение работы соответствующего действия c сети N действие a может сработать так, что b никогда не случится.
- На рисунке 4(c) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}N'$, но $N \not\equiv^{\tau}_{mes} N'$, так как только сети N' соответствует МСС с двумя конфликтными действиями a.
- На рисунке 4(d) $N \equiv^{\tau}_{mes} N'$, но $N \not\simeq N'$, так как никогда не срабатывающие переходы сетей N и N' помечены разными действиями (a и b). $\square$

Таким образом, мы получили ряд интересных результатов.

На сетях Петри с невидимыми действиями ST- и сохраняющие историю эквивалентности являются независимыми, в отличие от ситуации на сетях без невидимых переходов, что будет покаано далее. Кроме того, на сетях с невидимыми переходами мы имеем новое “измерение” в виде ветвистых эквивалентностей. Таким образом, появляются новые понятия $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST}$ и $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$, $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}$.

В этой работе мы получили также два новых отношения $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}$ и $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}$, которые являются результатами применения ST- и ветвистой идеи к интерливинговой и ЧУММ семантикам соответственно.

Кроме того, эквивалентность $\equiv^{\tau}_{mes}$ влечет только следовые отношения, и никакие более, в отличие от ситуации на сетях без невидимых переходов, где аналог упомянутой эквивалентности являетя самым сильным понятием в семантике ЧУММ.

4 Обратные-прямые τ-бисимуляционные эквивалентности

В этом разделе мы вводим обратные-прямые τ-бисимуляционные эквивалентности. Отличительной чертой данных отношений является то, что они требуют взаимного моделирования не только в прямом направлении (как обычно), но и в обратном.

4.1 Последовательные выполнения

Последовательные выполнение — это структура, содержащая информацию о причинных зависимостях событий в текушем вычислении, а также о порядке, в котором они произошли.

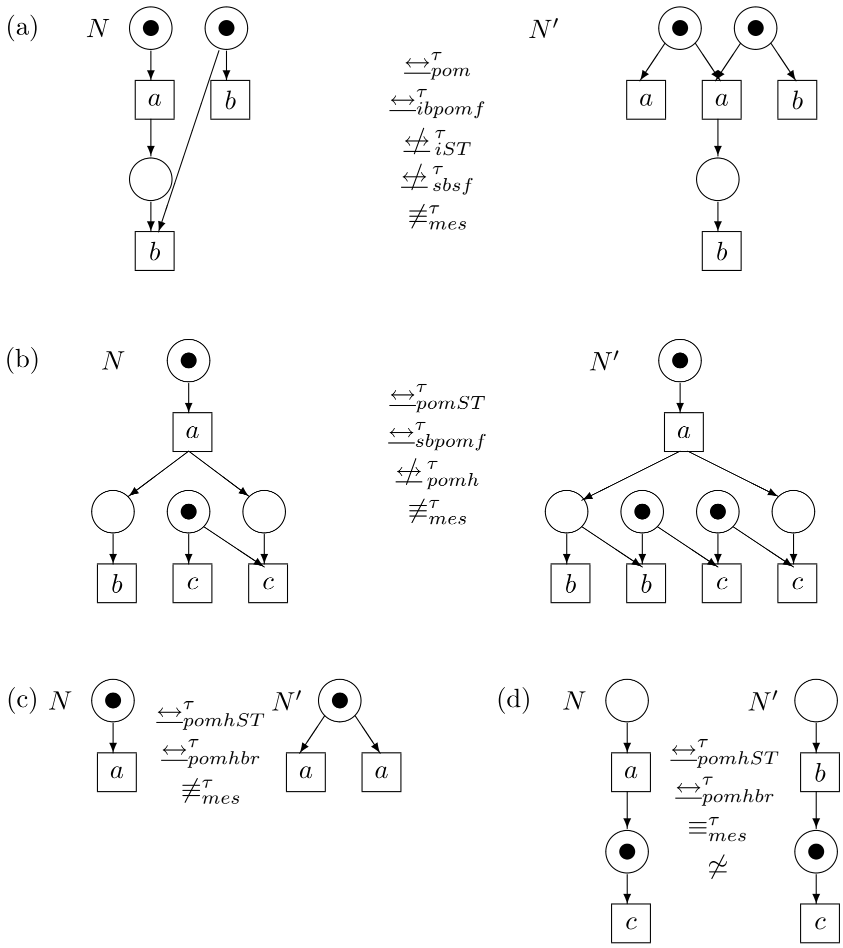

Рис. 4: Примеры базисных τ-эквивалентностей (продолжение)

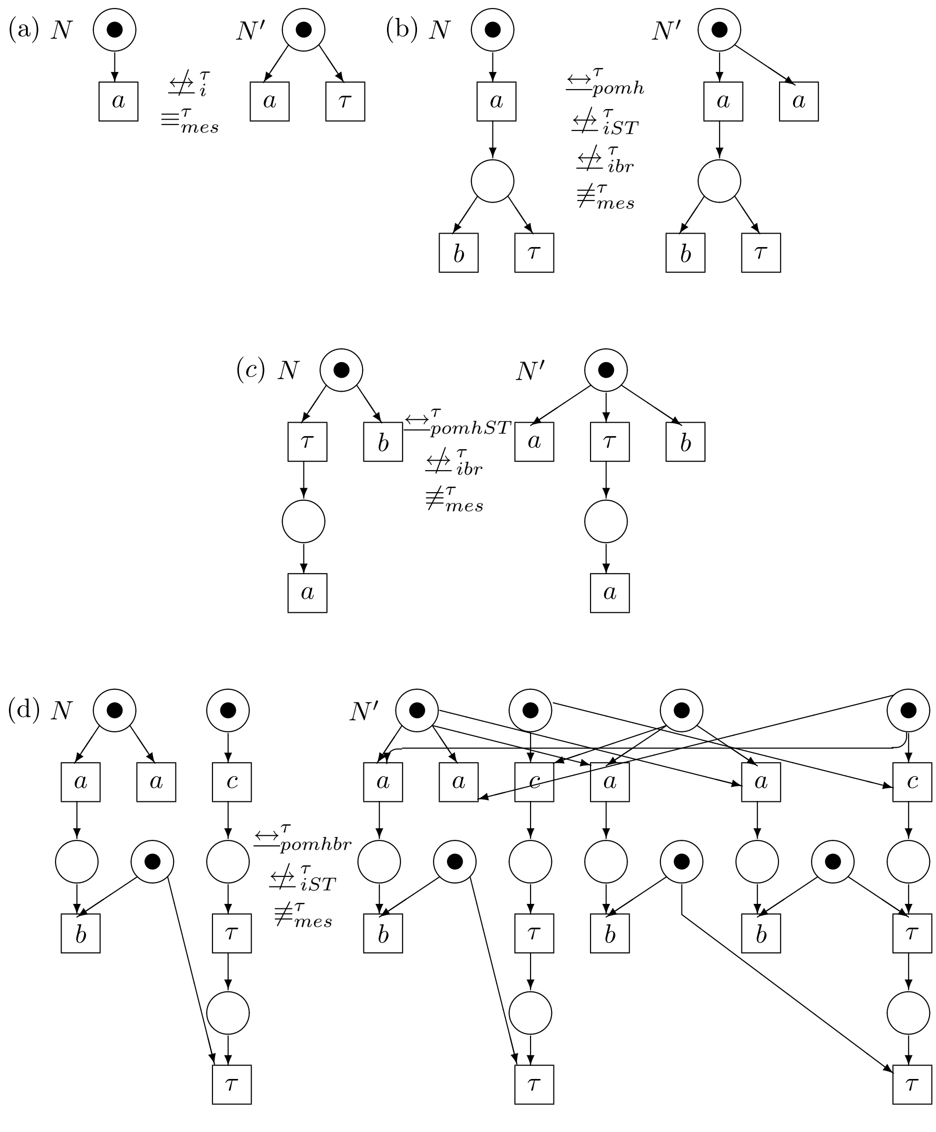

Рис. 5: Примеры базисных τ-эквивалентностей (продолжение 2)

Определение 4.1 Последовательное выполнение *сети N — пара (π, σ), где:*

- *процесс $\pi = (C, \varphi) \in \Pi(N)$ содержит информацию о причинно-следственных связях событий, приведших в данное состояние;*
- *цепочка $\sigma \in T_C^*$ такая, что $\pi_N \xrightarrow{\sigma} \pi$, содержит информацию о последовательности выполнения событий, приведших в данное состояние.*

Обозначим множество *всех последовательных выполнений* сети N через $Runs(N)$.

Начальное последовательное выполнение сети N — пара (π_N, ε), где ε — пустая цепочка. Обозначим через $|\sigma|$ *длину* цепочки σ.

Пусть $(\pi, \sigma),\ (\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \in Runs(N)$. Пишем $(\pi, \sigma) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\tilde{\pi}, \tilde{\sigma})$, если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi},\ \exists \hat{\sigma} \in T_{\widetilde{C}}^*\ \pi \xrightarrow{\hat{\sigma}} \tilde{\pi}$ и $\tilde{\sigma} = \sigma\hat{\sigma}$. Будем писать $(\pi, \sigma) \to (\tilde{\pi}, \tilde{\sigma})$, если $\exists \hat{\pi}\ (\pi, \sigma) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\tilde{\pi}, \tilde{\sigma})$.

Пусть $(\pi, \sigma) \in Runs(N),\ (\pi', \sigma') \in Runs(N')$ и $\sigma = v_1 \cdots v_n,\ \sigma' = v_1' \cdots v_n'$. Определим функцию $\beta_\sigma^{\sigma'} : T_C \to T_{C'}$ следующим образом: $\beta_\sigma^{\sigma'} = \{(v_i, v_i') \mid 1 \le i \le n\}$. Положим $\beta_\varepsilon^\varepsilon = \emptyset$.

Пусть $(\pi, \sigma) \in Runs(N)$ и $\sigma = v_1 \cdots v_n,\ \pi_N \xrightarrow{v_1} \ldots \xrightarrow{v_i} \pi_i\ (1 \le i \le n)$.

Введем следующие обозначения:

- $\pi(0) = \pi_N$,
  $\pi(i) = \pi_i\ (1 \le i \le n)$;
- $\sigma(0) = \varepsilon$,
  $\sigma(i) = v_1 \cdots v_i\ (1 \le i \le n)$.

4.2 Определения обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей

Теперь мы готовы ввести определения обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей.

Определение 4.2 *Пусть N и N' — некоторые сети. Отношение $\mathcal{R} \subseteq Runs(N) \times Runs(N')$ — $\star$-*обратная $\star\star$-прямая τ-бисимуляция *между N и N', $\star, \star\star \in${*интерливинговая, шаговая, ЧС, ЧУММ*}, запись $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star b \star\star f}^{\tau} N',\ \star, \star\star \in \{i, s, pw, pom\}$, если:*

1. $((\pi_N, \varepsilon), (\pi_{N'}, \varepsilon)) \in \mathcal{R}$.
2. $((\pi, \sigma), (\pi', \sigma')) \in \mathcal{R}$
   - *(обратно)*
     $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\pi, \sigma)$,
     (a) $|vis(T_{\widehat{C}})| = 1$, *если* $\star = i$;
     (b) $vis(\prec_{\widehat{C}}) = \emptyset$, *если* $\star = s$;

     $\Rightarrow\ \exists (\tilde{\pi}', \tilde{\sigma}') :\ (\tilde{\pi}', \tilde{\sigma}') \xrightarrow{\hat{\pi}'} (\pi', \sigma'),\ ((\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}), (\tilde{\pi}', \tilde{\sigma}')) \in \mathcal{R}$ *и*
     (a) $vis(\rho_{\widehat{C}'}) \sqsubseteq vis(\rho_{\widehat{C}})$, *если* $\star = pw$;
     (b) $vis(\rho_{\widehat{C}}) \simeq vis(\rho_{\widehat{C}'})$, *если* $\star \in \{i, s, pom\}$;
   - *(прямо)*
     $(\pi, \sigma) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\tilde{\pi}, \tilde{\sigma})$,
     (a) $|vis(T_{\widehat{C}})| = 1$, *если* $\star\star = i$;
     (b) $vis(\prec_{\widehat{C}}) = \emptyset$, *если* $\star\star = s$;

     $\Rightarrow\ \exists (\tilde{\pi}', \tilde{\sigma}') :\ (\pi', \sigma') \xrightarrow{\hat{\pi}'} (\tilde{\pi}', \tilde{\sigma}'),\ ((\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}), (\tilde{\pi}', \tilde{\sigma}')) \in \mathcal{R}$ *и*
     (a) $vis(\rho_{\widehat{C}'}) \sqsubseteq vis(\rho_{\widehat{C}})$, *если* $\star\star = pw$;
     (b) $vis(\rho_{\widehat{C}}) \simeq vis(\rho_{\widehat{C}'})$, *если* $\star\star \in \{i, s, pom\}$.
3. *Как пункт 2, но роли N и N' меняются.*

Сети N и N' $\star$-обратно $\star\star$-прямо τ-бисимуляционно эквивалентны, $\star, \star\star \in${интерливинговая, шаговая, ЧС, ЧУММ}*, запись $N \underline{\leftrightarrow}_{\star b \star\star f}^{\tau} N'$, если $\exists \mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star b \star\star f}^{\tau} N',\ \star, \star\star \in \{i, s, pw, pom\}$.*

Заметим, что обратные расширения последовательных выполнений *детерминированы*, то есть для $(\pi, \sigma) \in Runs(N)$ существует единственное последоватльное выполнение $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \in Runs(N)$ такое, что $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\pi, \sigma)$ и $|\tilde{\sigma}| = i\ (0 \le i \le |\sigma|)$. В данном случае $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) = (\pi(i), \sigma(i))$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombif} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombsf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpwf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf} \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwbif} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwbsf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwbpwf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwbpomf} \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbif} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpwf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpomf} \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif} & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf} \arrow[l] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpwf} \arrow[l] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpomf} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 6: Совпадение обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей

$$\begin{tikzcd}
 & & & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf} \arrow[d] \\
 & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf} \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpwf} \arrow[l] \arrow[d] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpomf} \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif} & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf} \arrow[l] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpwf} \arrow[l] & \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpomf} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Рис. 7: Взаимосвязи обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей

4.3 Сравнение обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей

Исследуем взаимосвязи обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей.

Предложение 4.1 *Пусть* $\star \in \{i, s, pw, pom\}$. *Для сетей* N *и* N':

1. $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pwb\star f} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomb\star f} N'$;
2. $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star bif} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star b\star f} N'$.

На рисунке 6 пунктирной линией обведены совпадающие обратные-прямые τ-бисимуляционные эквивалентности.

Следовательно, взаимосвязь обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей можно представить рисунком 7.

4.4 Сравнение обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей с базисными τ-эквивалентностями

Исследуем взаимосвязи обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей с базисными τ-эквивалентностями.

Предложение 4.2 *Для сетей* N *и* N':

1. $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} N'$;
2. $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} N'$;
3. $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N' \;\Rightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf} N'$.

Теорема 4.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \twoheadleftarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}, \simeq\}$ *и* $\star, \star\star \in \{\_, i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, pomh, pomhST, ibr, pomhbr, iSTbr, pomhSTbr, mes, ibsf, ibpwf, ibpomf, sbsf, sbpwf, sbpomf\}$. *Для сетей* N *и* N' $N \leftrightarrow_{\star} N' \;\Rightarrow\; N \twoheadleftarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда в графе на рисунке 8 существует направленный путь от* $\leftrightarrow_{\star}$ *к* $\twoheadleftarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\star\star}$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Следствие теоремы 3.1 и следующих рассуждений.

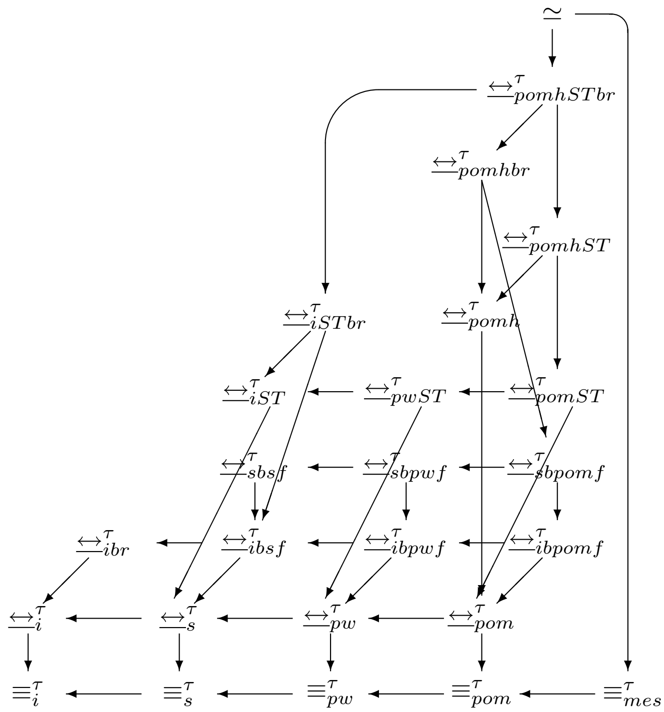

Рис. 8: Взаимосвязи обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей с базисными τ-эквивалентностями

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$ существует, так как по предложению 4.2 $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} = \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif}$ и изоморфизм ПЧУМ с пустым отношением предшествования является изоморфизмом одноэлементных ПЧУМ.

- Связи $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star bpwf} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star bsf}$, $\star \in \{i, s\}$, — следствия того, что гомоморфизм ПЧУМ является изоморфизмом ПЧУМ с пустым отношением предшествования.

- Связи $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star bpomf} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star bpwf}$, $\star \in \{i, s\}$, — следствия того, что изомоморфизм ПЧУМ является гомоморфизмом.

- Связи $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ib\star f} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star}$, $\star \in \{s, pw, pom\}$ доказываются построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sb\star f}N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star}N'$, определяемого следующим образом:
  $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists \sigma, \sigma' \ ((\pi, \sigma), (\pi', \sigma')) \in \mathcal{R}\}$.

- Связи $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sb\star f} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ib\star f}$, $\star \in \{s, pw, pom\}$, — следствия того, что изомоморфизм ПЧУМ с пустым отношением предшествования является изомоморфизмом одноэлементных ПЧУМ.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpomf}$ существует, так как по предложению 4.2 $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} = \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf}$ и гомоморфизм является изомоморфизмом ПЧУМ с пустым отношением предшествования.

- Связь $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} \to \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf}$ существует по предложению 4.2.

($\Rightarrow$) Отсутствие дополнительных нетривиальных стрелок в графе на рисунке 8 доказывается следующими примерами.

- На рисунке 3(c) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf}N'$, но $N \not\equiv^{\tau}_{pw} N'$.

- На рисунке 9(a) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbpwf}N'$, но $N \not\equiv^{\tau}_{pom} N'$.

- На рисунке 4(a) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibpomf}N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf}N'$, так как только в сети N' действие a можно выполнить так, что действие b обязательно зависит от a.

- На рисунке 3(b) $N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}N'$, но $N\underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf}N'$. $\square$

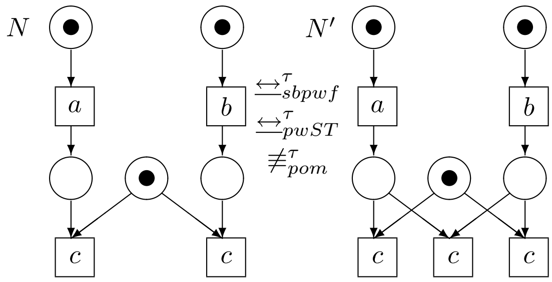

Рис. 9: Пример обратных-прямых τ-бисимуляционных эквивалентностей

Таким образом, мы получили ряд важных результатов, касающихся взаимосвязей обратных-прямых и базисных отношений.

Во-первых, мы имеем совпадение $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif} = \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr}$ и $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf} = \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}$, дающее ветвистую характеризацию обратного-прямого моделирования.

Второй интересный результат заключается в том, что $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}$ влечет только $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibsf}$, но не $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{sbsf}$. Следовательно, $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST}$ недостаточно сильна для того, чтобы обеспечить шаговое обратное моделирование. Данная ситуация отличается от той, которая имеется на сетях Петри без невидимых переходов.

4.5 Логическая характеризация

4.5.1 Логика BFL

Обратная-прямая логика (BFL) была введена в [15] на модели систем переходов для логического описания интерливинговой обратной интерливинговой прямой бисимуляционной эквивалентности.

Определение 4.3 *Пусть символ $\top$ обозначает тождественно истинную формулу и $a \in Act$.* Формула *BFL определяется следующим образом:*

$$\Phi ::= \ \top \mid \neg\Phi \mid \Phi \wedge \Psi \mid \langle\leftarrow a\rangle\Phi \mid \langle a\rangle\Phi$$

Определим $[a]\Phi = \neg\langle a\rangle\neg\Phi$ и $[\leftarrow a]\Phi = \neg\langle\leftarrow a\rangle\neg\Phi$.

Обозначим через **BFL** множество *всех формул логики BFL.*

Определение 4.4 *Пусть N — некоторая сеть и $(\pi, \sigma) \in Runs(N)$.* Отношение выполнимости $\models_N \subseteq Runs(N) \times$ **BFL** *определяется следующим образом:*

1. *$(\pi, \sigma) \models_N \top$ — всегда;*
2. *$(\pi, \sigma) \models_N \neg\Phi$, если $(\pi, \sigma) \not\models_N \Phi$;*
3. *$(\pi, \sigma) \models_N \Phi \wedge \Psi$, если $(\pi, \sigma) \models_N \Phi$ и $(\pi, \sigma) \models_N \Psi$;*
4. *$(\pi, \sigma) \models_N \langle\leftarrow a\rangle\Phi$, если $\exists(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \in Runs(N)$ $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\pi, \sigma)$, где $\hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi})$, $vis(l_{\widehat{C}}(T_{\widehat{C}})) = a$ и $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \models_N \Phi$;*
5. *$(\pi, \sigma) \models_N \langle a\rangle\Phi$, если $\exists(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \in Runs(N)$ $(\pi, \sigma) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\tilde{\pi}, \tilde{\sigma})$, где $\hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi})$, $vis(l_{\widehat{C}}(T_{\widehat{C}})) = a$ и $(\tilde{\pi}, \tilde{\sigma}) \models_N \Phi$.*

Определение 4.5 *Пишем $N \models_N \Phi$, если $(\pi_N, \varepsilon) \models_N \Phi$. Сети N и N'* логически эквивалентны *в BFL, запись $N =_{BFL} N'$, если $\forall\Phi \in$ **BFL** $N \models_N \Phi \ \Leftrightarrow\ N' \models_{N'} \Phi$.*

Пусть N — некоторая сеть и $\pi \in \Pi(N)$, $a \in Act$. Множество *видимых расширений* процесса π на действие a *(образов)* определяется следующим образом: $VisImage(\pi, a) = \{\tilde{\pi} \mid \pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi},\ \hat{\pi} = (\widehat{C}, \hat{\varphi}),$ $vis(l_{\widehat{C}}(T_{\widehat{C}})) = a\}$. Сеть N — *конечно-образная*, если $\forall\pi \in \Pi(N)$ $\forall a \in Act$ $|VisImage(\pi, a)| < \infty$.

Теорема 4.2 *[15] Для конечно-образных сетей N и N' $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} N' \ \Leftrightarrow\ N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibif} N' \ \Leftrightarrow\ N =_{BFL} N'$.*

На рисунке 5(c) $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} N'$, но $N \neq_{BFL} N'$, так как для $\Phi = \langle a\rangle[\leftarrow a]\langle b\rangle\top$ $N \not\models_N \Phi$, но $N' \models_{N'} \Phi$ из-за того, что в сети N' действие a может произойти так, что оно будет сымитировано последовательностью действий τa в N. Тогда состояное сети N, достигаемое после τ, должно быть связано с начальным состоянием сети N, но в этом случае выполнение действия b из начального состояния N' не может быть смоделировано из соответствующего состояния N.

Таким образом, в интерливинговой семантике, мы получили логическую характеризацию ветвистых и обратных-прямых отношений, или, симметрично, операционную характеризацию естественной эквивалентности обратной-прямой логики.

4.5.2 Логика $SPBFL$

ЧУММ обратная-прямая логика с невидимыми действиями ($SPBFL$) была введена в [19] на модели структур событий для логического описания ЧУММ обратной ЧУММ прямой τ-бисимуляционной эквивалентности.

Определение 4.6 *Пусть символ $\top$ обозначает тождественно истинную формулу и $a \in Act$, а ρ — ЧУММ с пометкой в Act.* Формула $SPBFL$ *определяется следующим образом:*

$$\Phi ::= \ \top \mid \neg\Phi \mid \Phi \wedge \Psi \mid \langle\leftarrow \rho\rangle\Phi \mid \langle a\rangle\Phi$$

Определим $[a]\Phi = \neg\langle a\rangle\neg\Phi$ и $[\leftarrow \rho]\Phi = \neg\langle\leftarrow \rho\rangle\neg\Phi$.

Обозначим через **SPBFL** множество *всех формул логики $SPBFL$.*

Заметим, что в формуле $\langle a\rangle\Phi$, соответствующей случаю прямого расширения, стоит действие a, а не ЧУММ ρ, так как $\underline{\leftrightarrow}_{pombif} = \underline{\leftrightarrow}_{pombpomf}$. Поэтому достаточно рассматривать прямые расширения только на одно действие.

Определение 4.7 *Пусть N — некоторая сеть и $(\pi,\sigma) \in Runs(N)$.* Отношение выполнимости $\models_N \subseteq Runs(N) \times$ **SPBFL** *определяется следующим образом:*

1. $(\pi,\sigma) \models_N \top$ *— всегда;*
2. $(\pi,\sigma) \models_N \neg\Phi$*, если* $(\pi,\sigma) \not\models_N \Phi$*;*
3. $(\pi,\sigma) \models_N \Phi \wedge \Psi$*, если* $(\pi,\sigma) \models_N \Phi$ *и* $(\pi,\sigma) \models_N \Psi$*;*
4. $(\pi,\sigma) \models_N \langle\leftarrow \rho\rangle\Phi$*, если* $\exists(\tilde{\pi},\tilde{\sigma}) \in Runs(N)$ $(\tilde{\pi},\tilde{\sigma}) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\pi,\sigma)$*, где* $\hat{\pi} = (\widehat{C},\hat{\varphi})$*,* $vis(\rho_{\widehat{C}}) \in \rho$ *и* $(\tilde{\pi},\tilde{\sigma}) \models_N \Phi$*;*
5. $(\pi,\sigma) \models_N \langle a\rangle\Phi$*, если* $\exists(\tilde{\pi},\tilde{\sigma}) \in Runs(N)$ $(\pi,\sigma) \xrightarrow{\hat{\pi}} (\tilde{\pi},\tilde{\sigma})$*, где* $\hat{\pi} = (\widehat{C},\hat{\varphi})$*,* $vis(l_{\widehat{C}}(T_{\widehat{C}})) = a$ *и* $(\tilde{\pi},\tilde{\sigma}) \models_N \Phi$.

Определение 4.8 *Пишем $N \models_N \Phi$, если $(\pi_N,\varepsilon) \models_N \Phi$. Сети N и N'* логически эквивалентны *в $SPBFL$, запись $N =_{SPBFL} N'$, если $\forall\Phi \in$* **SPBFL** *$N \models_N \Phi \ \Leftrightarrow\ N' \models_{N'} \Phi$.*

Теорема 4.3 *[19] Для конечно-образных сетей N и N' $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} N' \ \Leftrightarrow\ N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pombpomf} N' \ \Leftrightarrow\ N =_{SPBFL} N'$.*

На рисунке 4(b) $N =_{BFL} N'$, но $N \neq_{SPBFL} N'$, так как для $\Phi = [a][b]\langle c\rangle\langle\leftarrow (a;b)\|c\rangle\top$ ($(a;b)\|c$ обозначает ЧУММ, в котором действие b зависит от a, и a, b независимы с действием c), $N \models_N \Phi$, но $N' \not\models_{N'} \Phi$ из-за того, что только в сети N' после действия a действие b может сработать так, что действие c должно обязательно зависеть от a.

Таким образом, в семантике ЧУММ, мы получили логическую характеризацию ветвистых и обратных-прямых отношений, или, симметрично, операционную характеризацию естественной эквивалентности обратной-прямой логики.

5 Сравнение эквивалентностей с τ-эквивалентностями

В этом разделе ме исследуем взаимосвязи эквивалентностей, не абстрагирующихся от невидимых действий, со всеми рассмотренными τ-эквивалентностями.

Предложение 5.1 *Пусть $\leftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}\}$, $\star \in \{i,s,pw,pom,iST,pwST,pomST,mes,sbsf,sbpwf,sbpomf\}$, $\star\star \in \{s,pw,pom\}$. Для сетей N и N':*

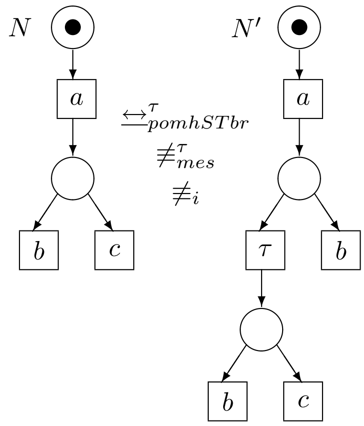

Рис. 10: Пример взаимосвязей эквивалентностей и τ-эквивалентностей

1. $N \leftrightarrow_{\star} N' \;\Rightarrow\; N \leftrightarrow^{\tau}_{\star} N'$;

2. $N \underline{\leftrightarrow}_{i} N' \;\Rightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} N'$;

3. $N \underline{\leftrightarrow}_{iST} N' \;\Rightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N'$;

4. $N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N' \;\Rightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$;

5. $N \underline{\leftrightarrow}_{\star\star} N' \;\Rightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ib\star\star f} N'$.

и все импликации — строгие.

Доказательство.

1. По определениям.

2. Доказывается построением на основе отношения $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} N$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{((\pi_E, \pi_P), (\pi'_E, \pi'_P), \beta) \mid (\pi_E, \pi'_E, \beta) \in \mathcal{R},\ (\pi_E, \pi_P) \in ST^{\tau} - \Pi(N),\ (\pi'_E, \pi'_P) \in ST^{\tau} - \Pi(N'),\ \beta(T_{C_P}) = T_{C'_P}\}$.

3. По определениям.

4. По определениям.

5. Доказывается построением на основе отношения $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}_{\star\star} N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ib\star\star f} N'$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{((\pi, \sigma), (\pi', \sigma')) \mid (\pi, \sigma) \in Runs(N),\ (\pi', \sigma') \in Runs(N'),\ |\sigma| = |\sigma'|,\ l_C(\sigma) = l_{C'}(\sigma'),\ \forall i\ (0 \le i \le |\sigma|)\ (\pi(i), \pi'(i)) \in \mathcal{R}\}$.

Строгость импликаций доказывается следующими примерами.

- На рисунке 10 $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$, но $N \not\equiv_i N'$, так как только в сети N' действие a может выполниться из начального состояния.

- На рисунке 5(a) $N \equiv^{\tau}_{mes} N'$, но $N \not\equiv_i N'$, так как только в сети N' действие τ может выполниться из начального состояния. $\square$

В этом разделе мы получили ряд интересных результатов.

Ясно, что абстрагирование от невидимых действий дает более слабые понятия эквивалентностей. Таким образом, импликация 1 из предложения 5.1 довольно очевидна. Однако, остальные связи не так тривиальны.

Связи 2–4 показывают, что ветвистая идея применима только при учете невидимых действий.

Связь 5 показывает, что интерливинговое обратное моделировние дает новые эквивалентности только в случае учета невидимых действий.

6 Сохранение τ-эквивалентностей при детализациях

В этом разделе мы исследуем рассмотренные τ-эквивалентности на сохранение при детализациях переходов. Мы используем операцию SM-детализации, то есть детализацию на сети из специального подкласса автоматных сетей, введенную в [5].

Определение 6.1 SM-сеть — *сеть* $D = \langle P_D, T_D, F_D, l_D, M_D\rangle$ *такая, что:*

1. $\forall t \in T_D\ |{}^\bullet t| = |t^\bullet| = 1$, *то есть каждый имеет ровно одно входное и ровно одно выходное места;*
2. $\exists p_{in},\ p_{out} \in P_D$ *такие, что* $p_{in} \neq p_{out}$ *и* ${}^\circ D = \{p_{in}\},\ D^\circ = \{p_{out}\}$, *то есть сеть D имеет единственное входное и единственное выходное места.*
3. $M_D = \{p_{in}\}$, *то есть сначала имеется единственная фишка в* p_{in}.

Определение 6.2 *Пусть* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$ *— некоторая сеть,* $a \in l_N(T_N)$ *и* $D = \langle P_D, T_D, F_D, l_D, M_D\rangle$ *— SM-сеть.* SM-детализация*, обозначение* $ref(N, a, D)$, *— это (с точностью до изоморфизма) сеть* $\overline{N} = \langle P_{\overline{N}}, T_{\overline{N}}, F_{\overline{N}}, l_{\overline{N}}, M_{\overline{N}}\rangle$, *такая, что:*

- $P_{\overline{N}} = P_N \cup \{\langle p, u\rangle \mid p \in P_D \setminus \{p_{in}, p_{out}\},\ u \in l_N^{-1}(a)\}$;
- $T_{\overline{N}} = (T_N \setminus l_N^{-1}(a)) \cup \{\langle t, u\rangle \mid t \in T_D,\ u \in l_N^{-1}(a)\}$;
- $F_{\overline{N}}(\bar{x}, \bar{y}) \begin{cases} F_N(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{x}, \bar{y} \in P_N \cup (T_N \setminus l_N^{-1}(a)); \\ F_D(x, y), & \bar{x} = \langle x, u\rangle,\ \bar{y} = \langle y, u\rangle,\ u \in l_N^{-1}(a); \\ F_N(\bar{x}, u), & \bar{y} = \langle y, u\rangle,\ \bar{x} \in {}^\bullet u,\ u \in l_N^{-1}(a),\ y \in p_{in}^\bullet; \\ F_N(u, \bar{y}), & \bar{x} = \langle x, u\rangle,\ \bar{y} \in {}^\bullet u,\ u \in l_N^{-1}(a),\ x \in {}^\bullet p_{out}; \\ 0, & \textit{иначе}; \end{cases}$
- $l_{\overline{N}}(\bar{u}) \begin{cases} l_N(\bar{u}), & \bar{u} \in T_N \setminus l_N^{-1}(a); \\ l_D(t), & \bar{u} = \langle t, u\rangle,\ t \in T_D,\ u \in l_N^{-1}(a); \end{cases}$
- $M_{\overline{N}}(p) \begin{cases} M_N(p), & p \in P_N; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Некоторая эквивалентность *сохраняется при детализациях*, если эквивалентные сети остаются таковыми после одновременного применения к ним любого оператора детализации.

Следущее предложение демонстрирует, что некоторые из рассмотренных в данной работе τ-эквивалентностей не сохраняются при SM-детализациях.

Предложение 6.1 *Пусть* $\star \in \{i, s\}$, $\star\star \in \{i, s, pw, pom, pomh, ibr, pomhbr, ibsf, ibpwf, ibpomf, sbsf, sbpwf, sbpomf\}$. *Тогда τ-эквивалентности* $\equiv^\tau_\star$, $\underline{\leftrightarrow}^\tau_{\star\star}$ *не сохраняются при SM-детализациях.*

Доказательство.

- На рисунке 11 $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_s N'$, но $ref(N, c, D) \not\equiv^\tau_i ref(N', c, D)$, так как только в $ref(N', c, D)$ можно выполнить последовательность действий $c_1 a b c_2$. Следовательно, τ-эквивалентности от $\equiv^\tau_i$ до $\underline{\leftrightarrow}^\tau_s$ не сохраняются при SM-детализациях.
- На рисунке 12 $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pom} N'$, но $ref(N, a, D) \underline{\not\leftrightarrow}^\tau_i ref(N', a, D)$, так как только в $ref(N', a, D)$ после срабатывания действия a_1 не сможет выполниться b. Следовательно, эквивалентности от $\underline{\leftrightarrow}^\tau_i$ до $\underline{\leftrightarrow}^\tau_{pom}$ не сохраняются при SM-детализациях.
- На рисунке 13 $N \underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomhbr} N'$, но $ref(N, a, D) \underline{\not\leftrightarrow}^\tau_i ref(N', a, D)$, так как только в $ref(N', a, D)$ действие c_1 может выполниться так, что после соответствующего действия c_1 в сети N действие a может случиться так, что действие b никогда не случится. Следовательно, эквивалентности от $\underline{\leftrightarrow}^\tau_i$ до $\underline{\leftrightarrow}^\tau_{pomhbr}$ не сохраняются при SM-детализациях.

На рисунке 14 линиями обведены τ-эквивалентности, которые не не сохраняются при SM-детализациях, что демонстрируют примеры на рисунках 11–13. ☐

Рассмотрим, какие τ-эквивалентности сохраняются при SM-детализациях.

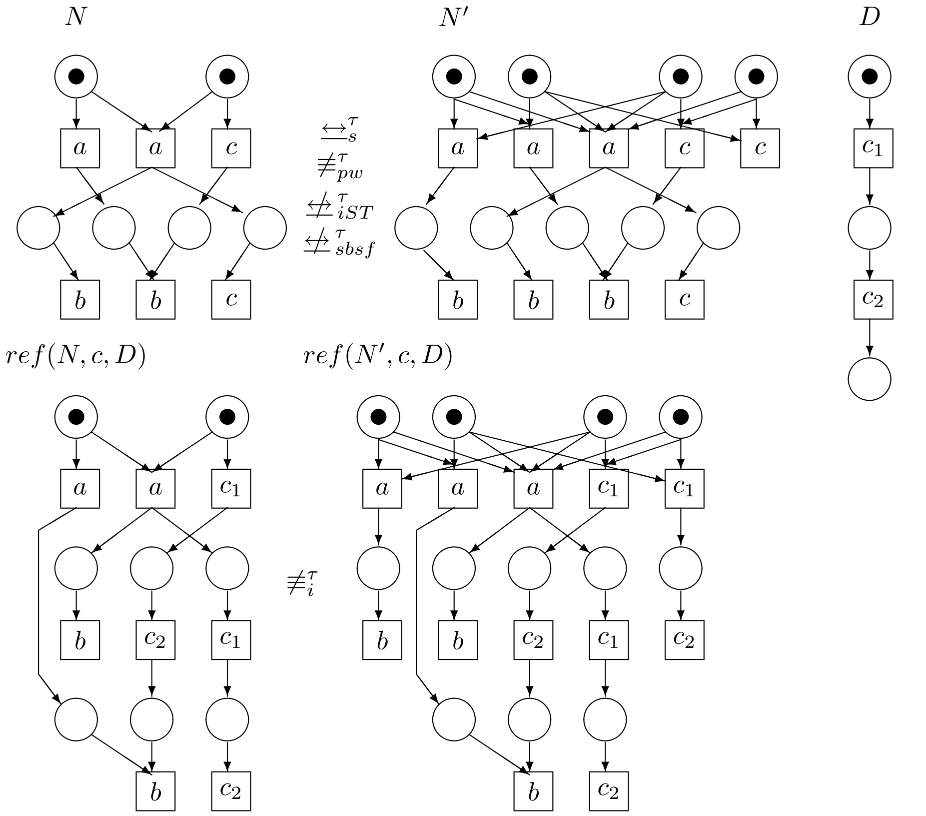

Рис. 11: τ-эквивалентности от $\equiv_i^\tau$ до $\underline{\leftrightarrow}_s^\tau$ не сохраняются при SM-детализациях

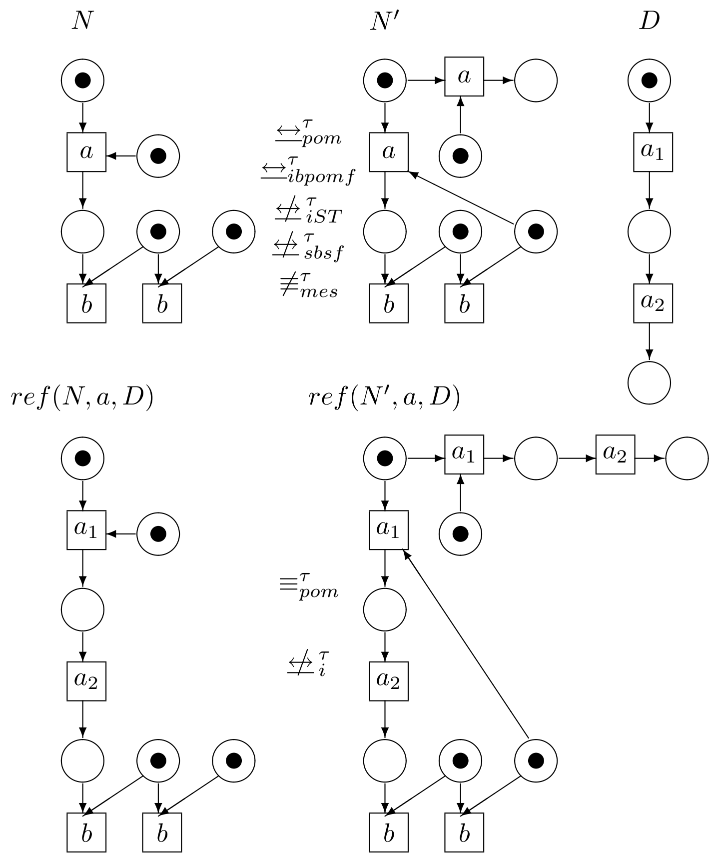

Рис. 12: τ-эквивалентности от $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i}$ до $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pom}$ не сохраняются при SM-детализациях

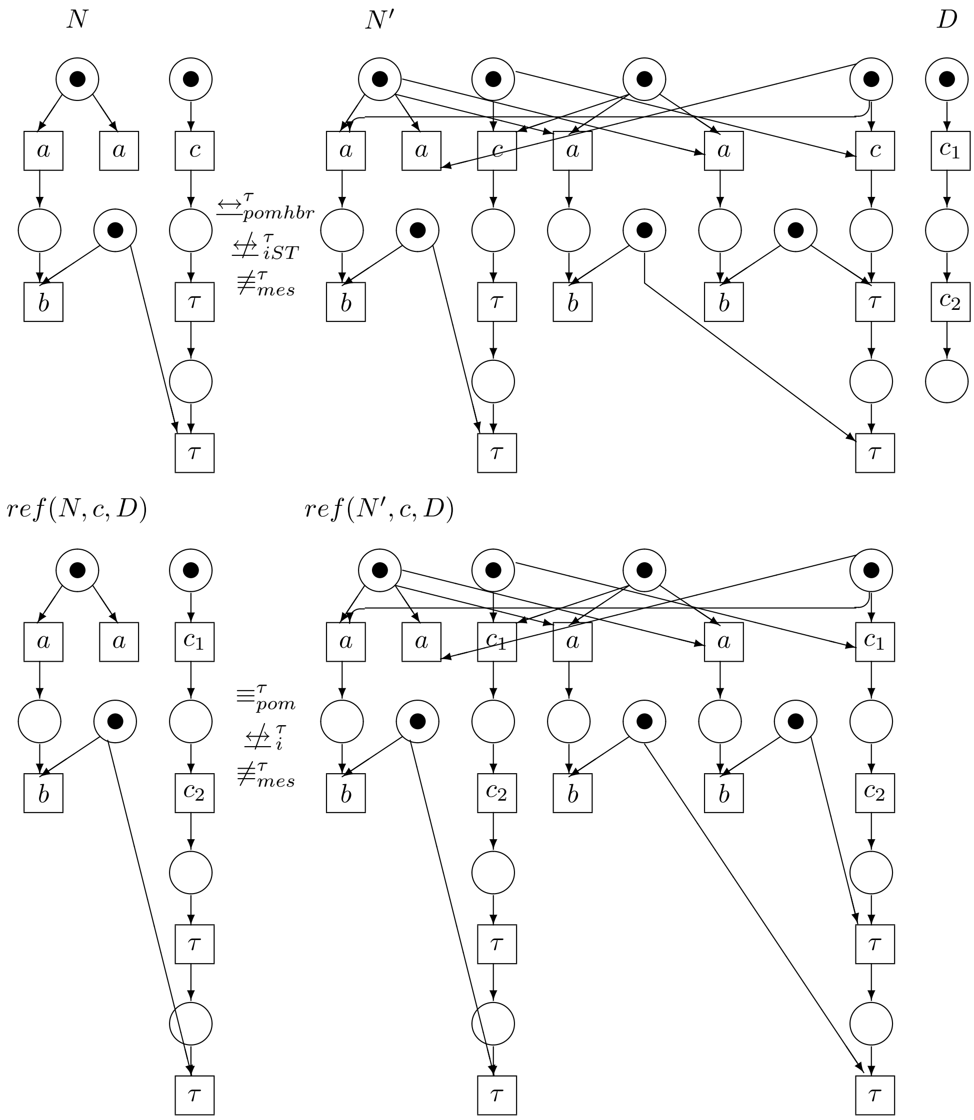

Рис. 13: τ-эквивалентности от $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i}$ до $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr}$ не сохраняются при SM-детализациях

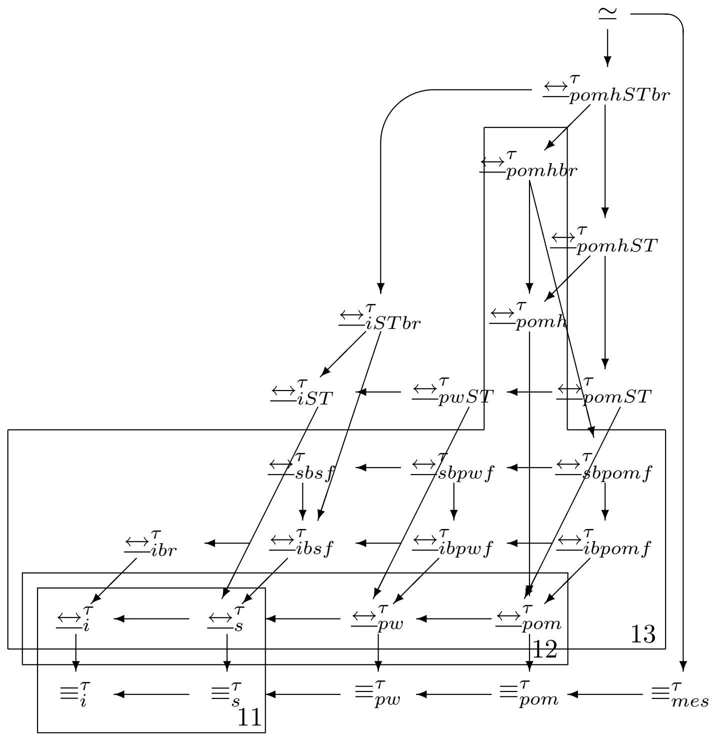

Рис. 14: τ-эквивалентности, не сохраняющиеся при SM-детализациях

Предложение 6.2 *Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'}) \cap Act$ и SM-сети D верно следующее.*

1. *Если $\star \in \{pw, pom\}$, то $N \equiv^{\tau}_{\star} N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \equiv^{\tau}_{\star} ref(N', a, D)$.*
2. *Если $\star \in \{i, pw, pom\}$, то $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star ST} N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star ST} ref(N', a, D)$.*
3. *[5, 10] $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} ref(N', a, D)$.*
4. *Если $\star \in \{i, pomh\}$, то $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star STbr} N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{\star STbr} ref(N', a, D)$.*
5. *$N \equiv^{\tau}_{mes} N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \equiv^{\tau}_{mes} ref(N', a, D)$.*
6. *$N \simeq N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \simeq ref(N', a, D)$.*

Теорема 6.1 *Пусть $\leftrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}, \simeq\}$ и $\star \in \{\_, i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, pomh, pomhST, ibr, pomhbr, iSTbr, pomhSTbr, mes, ibsf, ibpwf, ibpomf, sbsf, sbpwf, sbpomf\}$. Для сетей N и N' таких, что $a \in l_N(T_N) \cap l_{N'}(T_{N'}) \cap Act$ и SM-сети D $N \leftrightarrow_{\star} N' \ \Rightarrow\ ref(N, a, D) \leftrightarrow_{\star} ref(N', a, D)$ тогда и только тогда, когда эквивалентность $\leftrightarrow_{\star}$ заключена в овал на рисунке 15.*

Доказательство. По предложениям 6.1 и 6.2. □

Таким образом, мы получили ряд интересных результатов, связанных с сохранением при детализациях. Во-первых, $\equiv^{\tau}_{pw}$, $\equiv^{\tau}_{pom}$ и $\equiv^{\tau}_{mes}$ сохраняются при этой операции.

Следующий важный результат состоит в том, что все ST-эквивалентности также выдерживают эту операцию. Новые ST-отношения, которые мы ввели в этой работе, также могут использоваться при нисходящей разработке. Если для многоуровневого дизайна требуется понятие ветвистой эквиалентности, и досточно интерливинговой семантики, то можно использовать $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr}$. В семантике ЧУММ подходящим отношением является $\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr}$.

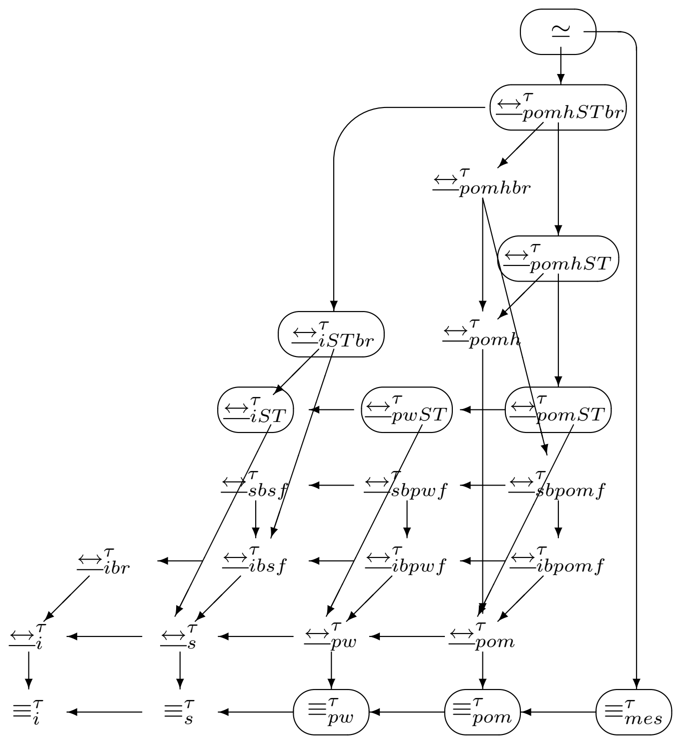

Рис. 15: Сохранение τ-эквивалентностей при SM-детализациях

7 τ-эквивалентности на подклассах сетей

В этом разделе мы рассмотрим τ-эквивалентности на сетях без невидимых переходов и на последовательных сетях.

7.1 τ-эквивалентности на сетях без невидимых переходов

В этом разделе мы рассмотрим τ-эквивалентности на сетях без невидимых переходов, где ни один из переходов не помечен действием τ.

Предложение 7.1 *Пусть* $\leftrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}\}$, $\star \in \{i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, mes, sbsf, sbpwf, sbpomf\}$, $\star\star \in \{s, pw, pom\}$. *Для сетей без невидимых переходов* N *и* N'*:*

1. $N \leftrightarrow_{\star} N' \;\Leftrightarrow\; N \leftrightarrow^{\tau}_{\star} N'$;
2. $N \underline{\leftrightarrow}_{i} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} N'$;
3. $N \underline{\leftrightarrow}_{iST} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N'$;
4. $N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$;
5. $N \underline{\leftrightarrow}_{\star\star} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ib\star\star f} N'$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$

1. По определениям.
2. Доказывается построением на основе отношения $\mathcal{R} : N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} N'$ нового отношения $\mathcal{S} : N \underline{\leftrightarrow}_{pomh} N$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi', \beta) \mid \exists \beta\ ((\pi, \pi), (\pi', \pi'), \beta) \in \mathcal{R}\}$.
3. По определениям.
4. По определениям.

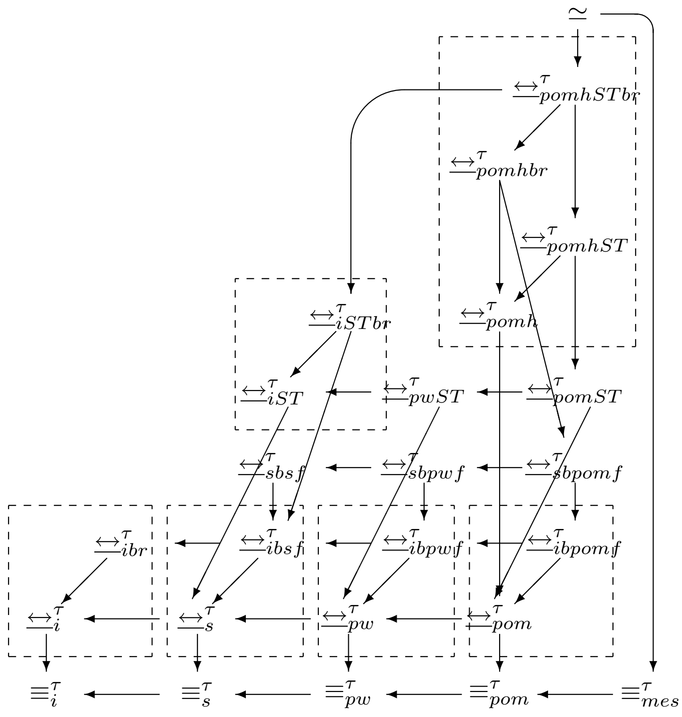

Рис. 16: Совпадение τ-эквивалентностей на сетях без невидимых переходов

5. Доказывается построением на основе отношения $\mathcal{R} : N\underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ib\star\star f}N'$ the нового отношения $\mathcal{S} : N\underline{\leftrightarrow}_{\star\star}N'$, определяемого следующим образом: $\mathcal{S} = \{(\pi, \pi') \mid \exists \sigma, \sigma' \ ((\pi, \sigma), (\pi', \sigma')) \in \mathcal{R}\}$.

($\Rightarrow$) По предложению 5.1, так как сети с видимыми переходами — подкласс сетей с невидимыми переходами. ◻

На рисунке 16 пунктирной линией обведены τ-эквивалентности, совпадающие на сетях без невидимых переходов.

Теорема 7.1 *Пусть* $\leftrightarrow, \twoheadleftarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \in \{\equiv, \underline{\leftrightarrow}, \simeq\}$, $\star, \star\star \in \{\_, i, s, pw, pom, iST, pwST, pomST, pomh, ibr, mes, sbsf, sbpwf, sbpomf\}$. *Для сетей с видимыми переходами* N *и* N' $N \leftrightarrow_{\star} N' \ \Rightarrow \ N \twoheadleftarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\star\star} N'$ *тогда и только тогда, когда в графе на рисунке 17 существует направленный путь от* $\leftrightarrow_{\star}$ *к* $\twoheadleftarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow_{\star\star}$.

Доказательство. По предложению 7.1 и теореме 1 из [20]. ◻

В этом разделе мы получили ряд интересных результатов.

Ясно, что абстрагирование от невидимых действий не играет никакой роли на сетях Петри без невидимых действий. Таким образом, мы имеем совпадение отношений, абстрагирующихся от невидимых действий с теми, которые не учитывают данные действия, и равенство 1 из предложения 5.1 очевидно. Однако, остальные равенства не так тривиальны.

Равенства 2–4 показывают, что ветвистая идея применима только при учете невидимых действий.

Равенство 5 показывает, что интерливинговое обратное моделировние дает новые эквивалентности только в случае учета невидимых действий.

7.2 τ-эквивалентности на последовательных сетях

Рассмотрим τ-эквивалентности на последовательных сетях, где никакие два перехода не могут сработать параллельно.

Определение 7.1 *Сеть* $N = \langle P_N, T_N, F_N, l_N, M_N\rangle$ — последовательная*, если* $\forall M \in Mark(N) \ \neg\exists t, u \in T_N : \ ^\bullet t + {}^\bullet u \subseteq M$.

Предложение 7.2 *Для последовательных сетей* N *и* N'*:*

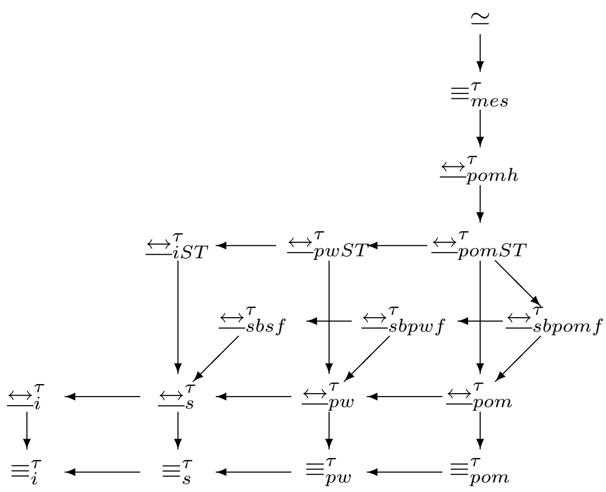

Рис. 17: Взаимосвязь τ-эквивалентностей на сетях без невидимых переходов

1. *$N \equiv^{\tau}_{i} N' \;\Leftrightarrow\; N \equiv^{\tau}_{pom} N'$;*
2. *$N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomh} N'$;*
3. *$N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iST} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhST} N'$;*
4. *$N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhbr} N'$;*
5. *$N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{iSTbr} N' \;\Leftrightarrow\; N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{pomhSTbr} N'$.*

Доказательство.

1. ($\Leftarrow$) По теореме 3.1.

   ($\Rightarrow$) Пусть $N \equiv^{\tau}_{i} N'$. Тогда $VisIntTraces(N) = VisIntTraces(N')$. Для доказательства того, что $N \equiv^{\tau}_{pom} N'$, достаточно установить равенство $VisPomsets(N) = VisPomsets(N')$. Оно очевидно, так как $VisPomsets(N)$ и $VisPomsets(N')$ — линейно упорядоченные мультимножества (цепочки), и существует взаимно однозначное отображение между $VisIntTraces(N)$ и $VisPomsets(N)$ ($VisIntTraces(N')$ и $VisPomsets(N')$ соответственно).
2. По предложению 5.4 из [5].
3. Аналогично пункту 2.
4. Аналогично пункту 2.
5. Аналогично пункту 2. □

На рисунке 18 пунктирной линией обведены τ-эквивалентности, совпадающие на последовательных сетях.

Теорема 7.2 *Пусть $\leftrightarrow, \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow \in \{\equiv^{\tau}, \underline{\leftrightarrow}^{\tau}, \simeq\}$, $\star, \star\star \in \{\_, i, iST, ibr, iSTbr, mes\}$. Для последовательных сетей N и N' $N \leftrightarrow_{\star} N' \;\Rightarrow\; N \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow_{\star\star} N'$ тогда и только тогда, когда в графе на рисунке 19 существует направленный путь от $\leftrightarrow_{\star}$ к $\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow_{\star\star}$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) По предложению 7.2 и теореме 4.1.

($\Rightarrow$) Отсутствие дополнительных нетривиальных стрелок в графе на рисунке 19 доказывается следующими примерами на последовательных сетях с невидимыми переходами.

- На рисунке 5(a) $N \equiv^{\tau}_{mes} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{i} N'$.
- На рисунке 5(c) $N \underline{\leftrightarrow}^{\tau}_{i} N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}^{\tau}_{ibr} N'$.

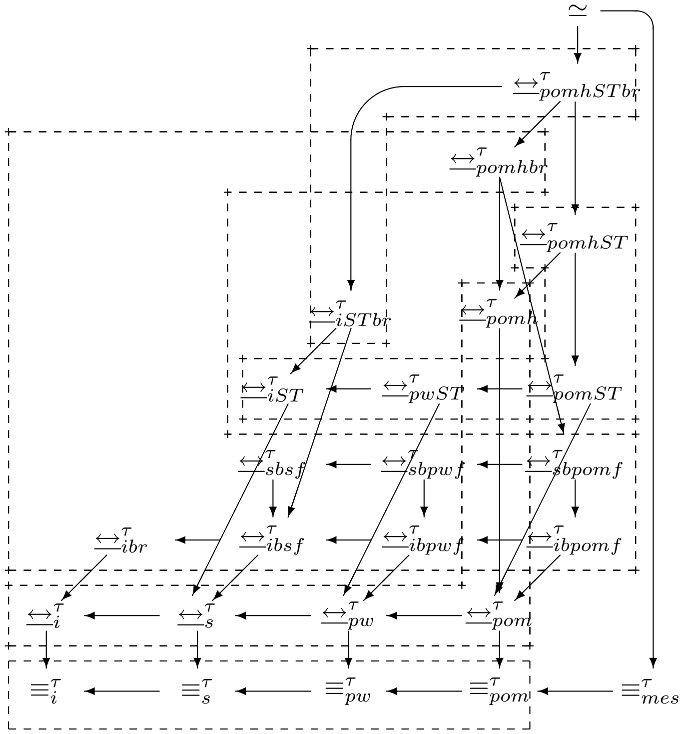

Рис. 18: Совпадение τ-эквивалентностей на последовательных сетях

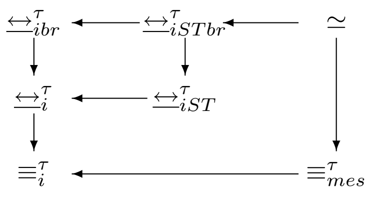

Рис. 19: Взаимосвязь τ-эквивалентностей на последовательных сетях

- На рисунке 5(b) $N \underline{\leftrightarrow}_i^\tau N'$, но $N \underline{\not\leftrightarrow}_{iST}^\tau N'$.
- На рисунке 4(c) $N \underline{\leftrightarrow}_{iSTbr}^\tau N'$, но $N \not\equiv_{mes}^\tau N'$. □

Таким образом, мы получили ряд важных результатов.

Во-первых, ясно, что на последовательных сетях все ЧУММ процессов являются строго упорядоченными, а, следовательно, они — простые цепочки. Поэтому все интерливинговые и соответствующие им ЧУММ эквивалентности совпадают, и равенство 1 из предложения 7.2 очевидно. Но другие равенства не столь тривиальны.

Основным является равенство 2, показывающее совпадение интерливинговых и ЧУММ сохраняющих историю бисимуляционных отношений. Таким образом, идея сохранения истории на последовательных сетях не дает никаких новых эквивалентностей.

Равенства 3–5 являются следствиями равенства 2. В дополнение к последнему, они учитывают ST- или ветвистую идеи, либо обе идеи одновременно.

8 Заключение

В данной работе мы дополнили новыми понятиями и провели исследование группы базисных τ-эквивалентностей, а также обратных-прямых бисимуляционных отношений. Мы сравнили их как на всем классе сетей Петри, так и на их подклассах сетей без невидимых переходов и последовательных сетей. Все рассмотренные τ-эквивалентности были проверены на сохранение при SM-детализациях. Таким образом, мы можем использовать понятия τ-эквивалентностей, сохраняющиеся при SM-детализациях, во время нисходящей разработки параллельных систем.

Дальнейшие исследования могут состоять в изучении τ-вариантов бисимуляционных эквивалентностей мест [2], которые используются для эффективной семантически корректной редукции сетей. В работе [23] мы уже исследовали эквивалентности мест для сетей Петри без невидимых переходов. Следовательно, нашей задачей сейчас является перенос этих результатов на более широкий класс сетей. В [3, 1] было определено понятие интерливинговой τ-бисимуляционной эквивалентности мест и показано его использование для сохраняющего поведение упрощения сетей Петри с невидимыми переходами. Было упомянуто, что τ-варианты бисимуляций мест дают намного больше редукций, чем исходные отношения. Это достигается за счет слияния большого числа невидимых переходов. Было бы интересно проверить также неинтерливинговые варианты бисимуляций мест для того, чтобы учитывать истинный параллелизм при редукции сетей.

Список литературы

[1] Autant, C., Pfister, W., Schnoebelen, Ph. *Place bisimulations for the reduction of labelled Petri nets with silent moves. Proceedings of International Conference on Computing and Information*, 1994.

[2] Autant, C., Schnoebelen, Ph. *Place bisimulations in Petri nets. Lecture Notes in Computer Science* **616**, p. 45–61, June 1992.

[3] Autant, C. *Petri nets for the semantics and the implementation of parallel processes. Ph.D. Thesis*, Institut National Polytechnique de Grenoble, May 1993 (in French).

[4] Best, E., Devillers, R. *Sequential and concurrent behavior in Petri net theory.* Theoretical Computer Science **55**, p. 87–136, 1987.

[5] Best, E., Devillers, R., Kiehn A., Pomello L. *Concurrent bisimulations in Petri nets. Acta Informatica* **28**, p. 231–264, 1991.

[6] Cherief, F. *Back and forth bisimulations on prime event structures. Lecture Notes in Computer Science* **605**, p. 843–858, June 1992.

[7] Cherief, F. *Contributions à la sémantique du parallélisme: bisimulations pour le raffinement et le vrai parallélisme. Ph.D. Thesis*, Institut National Politechnique de Grenoble, France, October 1992 (in French).

[8] Cherief, F. *Investigations of back and forth bisimulations on prime event structures. Computers and Artificial Intelligence* **11**(5), p. 481–496, 1992.

[9] DEVILLERS, R. *Maximality preserving bisimulation.* Technical Report **LIT-214**, Lab. Informatique Theorique, Universite Libre de Bruxelles, March 1990.

[10] DEVILLERS, R. *Maximality preserving bisimulation.* Theoretical Computer Science **102**, p. 165–184, 1992.

[11] ENGELFRIET, J. *Branching processes of Petri nets.* Acta Informatica **28**(6), p. 575–591, 1991.

[12] VAN GLABBEEK, R.J. *Comparative concurrency semantics and refinement of actions. Ph.D. Thesis*, Free University, Amsterdam, 1990.

[13] VAN GLABBEEK, R.J. *The linear time – branching time spectrum II: the semantics of sequential systems with silent moves. Extended abstract.* Lecture Notes in Computer Science **715**, p. 66–81, 1993.

[14] MILNER, R.A.J. *A calculus of communicating systems.* Lecture Notes in Computer Science **92**, p. 172–180, 1980.

[15] DE NICOLA, R., MONTANARI, U., VAANDRAGER, F.W. *Back and forth bisimulations.* Lecture Notes in Computer Science **458**, p. 152–165, 1990.

[16] PETRI, C.A. *Kommunikation mit Automaten. Ph.D. Thesis*, Universität Bonn, Schriften des Instituts für Instrumentelle Mathematik, 1962 (in German).

[17] POMELLO, L. *Some equivalence notions for concurrent systems. An overview.* Lecture Notes in Computer Science **222**, p. 381–400, 1986.

[18] POMELLO, L., ROZENBERG, G., SIMONE, C. *A survey of equivalence notions for net based systems.* Lecture Notes in Computer Science **609**, p. 410–472, 1992.

[19] PINCHINAT, S. *Bisimulations for the semantics of reactive systems. Ph.D. Thesis*, Institut National Politechnique de Grenoble, January 1993 (in French).

[20] TARASYUK, I.V. *Equivalence notions for design of concurrent systems using Petri nets.* Hildesheimer Informatik-Bericht **4/96**, part 1, 19 p., Institut für Informatik, Universität Hildesheim, Hildesheim, Germany, January 1996.

[21] TARASYUK, I.V. *An investigation of τ-equivalences.* Hildesheimer Informatik-Bericht **9/97**, 28 p., Institut für Informatik, Universität Hildesheim, Hildesheim, Germany, April 1997.

[22] TARASYUK, I.V. *τ-equivalences and refinement.* Proceedings of International Refinement Workshop and Formal Methods Pacific - 98 (IRW/FMP'98), Work-in-Progress Papers, Canberra, Australia, September 29 – October 2, 1998, Jim Grundy, Martin Schwenke and Trevor Vickers, eds., *Joint Computer Science Technical Report Series* **TR-CS-98-09**, The Australian National University, p. 110–128, September 1998.

[23] TARASYUK, I.V. *Place bisimulation equivalences for design of concurrent and sequential systems.* Proceedings of MFCS'98 Workshop on Concurrency, Brno, Czech Republic, August 27–29, 1998, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* **18**, 16 p., 1998 (`http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume18.html`).

[24] VOGLER, W. *Bisimulation and action refinement.* Lecture Notes in Computer Science **480**, p. 309–321, 1991.

[25] VOGLER, W. *Failures semantics based on interval semiwords is a congruence for refinement.* Distributed Computing **4**, p. 139–162, 1991.