

Стохастические процессные алгебры (СПА): И.В. Тарасюк (2021 г.)

1. Анализ производительности в СПА с дискретным временем *dt*sdPBC [Tar21]:

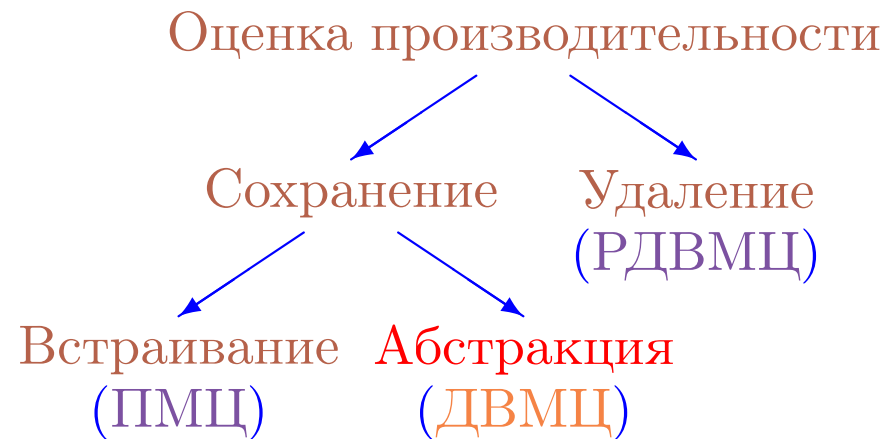
- Параллельная СПА: исчисление дискретно-временных стохастических и детерминированных боксов Петри *dt*sdPBC И.В. Тарасюка [Tar19, Tar20a, Tar20b, Tar21] — дискретно-временное стохастическое и детерминированное расширение исчисления боксов Петри, Petri Box Calculus (PBC), А. Беста, Р. Девиллерса, Дж.Г. Холла и М. Кутни.
- Выразительный синтаксис: активности — стохастические мультидействия (α, ρ) с вероятностями $\rho \in (0; 1)$ выполнения на следующем такте времени и детерминированные мультидействия $(\alpha, \mathbb{h}_i^\theta)$ с постоянными задержками $\theta \in \{0, 1 \dots\}$ и весами $l \in (0; \infty)$; мощные операции — $;$, $||$, $[f]$, *rs*, *sy*, $[**]$.
- Шаговая операционная семантика: вероятностные системы переходов процессных выражений, по правилам структурной операционной семантики.
- Сетевая денотационная семантика: подкласс помеченных дискретно-временных стохастических и детерминированных сетей Петри (ПДВСДСП), дискретно-временные стохастические и детерминированные боксы Петри (*dt*sd-боксы); согласована с операционной по стохастической бисимуляции.

2. Анализ производительности в СПА с дискретным временем *dt*sdPBC [Tar21]:

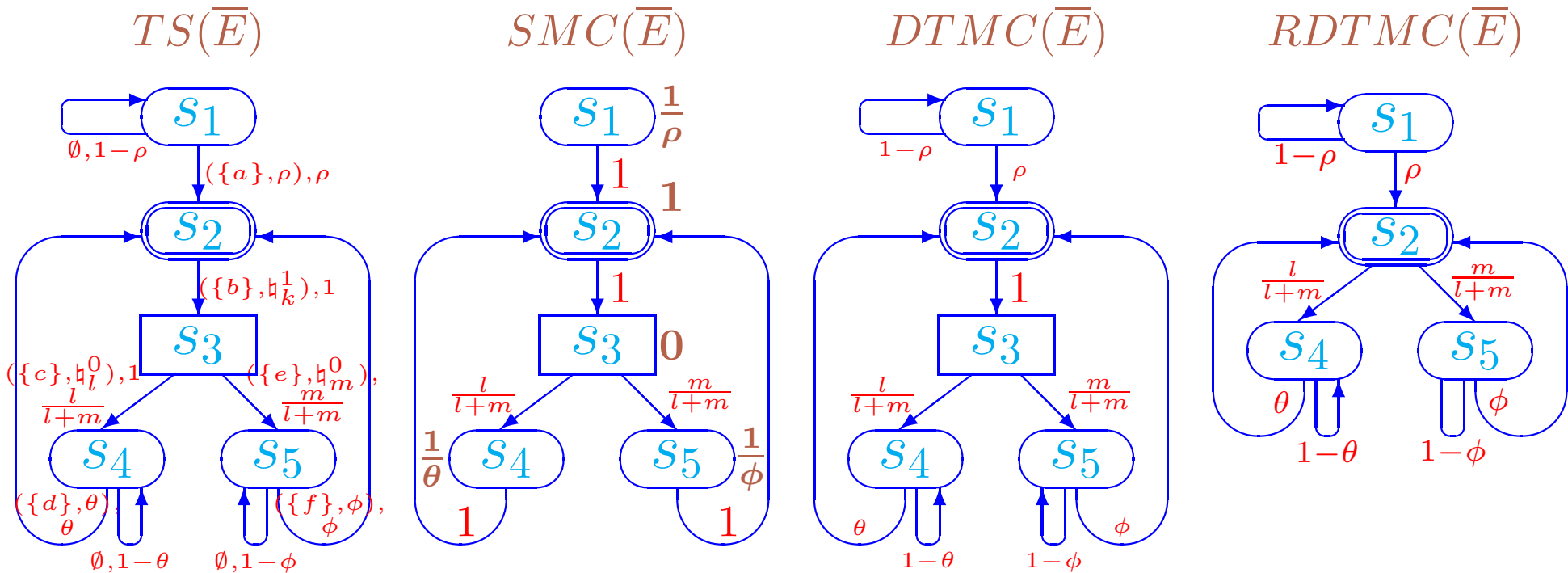
- Стандартная оценка производительности: базовый стохастический процесс — полумарковская цепь (ПМЦ), извлекаемая из системы переходов по методу встраивания, конструирующему встроенную ДВМЦ (ВДВМЦ) вероятностей смен состояний ПМЦ и ФРВ времени пребывания в этих состояниях.
- Время пребывания в состояниях ПМЦ: геометрически распределенное (включая 1 и ∞) или нулевое, т.е. превышающие 1 конечные фиксированные задержки разделены на единичные для получения (полу)марковской модели.
- Индексы (меры) производительности: на основе стабильной функции масс вероятностей (ФМВ) для ПМЦ и вектора среднего времени пребывания (СВП) процессного выражения.
- Альтернативная оценка производительности: дискретно-временная цепь Маркова (ДВМЦ) и редуцированная ДВМЦ (РДВМЦ), полученная удалением исчезающих (с нулевой задержкой) состояний ДВМЦ.
- Оценка на основе ДВМЦ: позволяет избежать построения ВДВМЦ и взвешивания масс вероятностей в состояниях их средним временем пребывания — метод абстракции от исчезающих состояний.

3. Анализ производительности в СПА с дискретным временем *dt*sdPBC [Tar21]:

- Оценка на основе РДВМЦ: упрощает анализ больших систем благодаря удалению **исчезающих** состояний, дающему **модель меньшего размера**, которую легче решать **напрямую** — метод **удаления исчезающих** состояний.
- Сохранение параллелизма: в ПМЦ, ДВМЦ и РДВМЦ есть **переходы**, описывающие совместное **выполнение нескольких активностей** на такте.
- Иллюстративный пример моделирования и анализа: **система путешествий** с **обобщенными** (переменными) вероятностями и весами, вычисление ее **индексов производительности** методами **встраивания**, **абстракции** и **удаления**.



Методы оценки производительности в *dt*sdPBC (Абстракция не рассматривалась в литературе)



Система переходов, ПМЦ, ДВМЦ и РДВМЦ \bar{E} для процессного выражения системы

$$\text{путешествий } E = [(\{a\}, \rho) * ((\{b\}, \frac{1}{k}); (((\{c\}, \frac{l}{l+m}, \frac{0}{l+m}); (\{d\}, \theta)) \square ((\{e\}, \frac{m}{l+m}, \frac{0}{l+m}); (\{f\}, \phi)))) * \text{Stop}]$$

$(\{a\}, \rho)$: планирование путешествия с вероятностью ρ завершения в следующий момент времени.

$(\{b\}, \frac{1}{k})$: осмотр города и возвращение на вокзал в течение ровно 1 часа.

$(\{c\}, \frac{l}{l+m}, \frac{0}{l+m})$ и $(\{e\}, \frac{m}{l+m}, \frac{0}{l+m})$: срочная посадка на автобус или поезд за время 0; l автобусов на m поездов ($l < m$).

$(\{d\}, \theta)$ и $(\{f\}, \phi)$: поездка на автобусе или поезде с вероятностями θ и ϕ ($\theta > \phi$) оконч. в сл. мом. вр.

S-действительное состояние s_1 : геометрически распределенное (с параметром ρ) пребывание дома.

W-действительное состояние s_2 : фиксированное (1) пребывание в городе в течение одного часа.

Исчезающее состояние s_3 : фиксированное (0) мгновенное (без ожидания) пребывание на вокзале.

S-действительные состояния s_4 и s_5 : геом. распр. (с пар. θ и ϕ , $\theta > \phi$) пребывание в автобусе/поезде.

Индексы производительности на основе стабильной ФМВ для $SMC(\bar{E})$

$\varphi = \frac{1}{\theta\phi(l+m)+\phi l+\theta m} (0, \theta\phi(l+m), 0, \phi l, \theta m)$ и вектора СВП $\bar{E} SJ = \left(\frac{1}{\rho}, 1, 0, \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\phi}\right)$:

- Среднее время между посещением городов (поездки) —

$$ReturnTime(s_2) = \frac{1}{\varphi(s_2)} = 1 + \frac{\phi l + \theta m}{\theta\phi(l+m)}.$$

- Доля времени, проведенного в городе (осмотра) —

$$TimeFract(s_2) = \varphi(s_2) = \frac{\theta\phi(l+m)}{\theta\phi(l+m)+\phi l+\theta m}.$$

- Доля времени, проведенного в транспорте (поездки) —

$$TimeFract(\{s_4, s_5\}) = \varphi(s_4) + \varphi(s_5) = \frac{\phi l + \theta m}{\theta\phi(l+m)+\phi l+\theta m}.$$

- Относительная доля времени осмотра к поездке —

$$RltTimeFract(\{s_2\}, \{s_4, s_5\}) = \frac{\varphi(s_2)}{\varphi(s_4)+\varphi(s_5)} = \frac{\theta\phi(l+m)}{\phi l + \theta m}.$$

- Темп отправления из города или прибытия в город —

$$ExitFreq(s_2) = \frac{\varphi(s_2)}{SJ(s_2)} = \frac{\theta\phi(l+m)}{\theta\phi(l+m)+\phi l+\theta m}.$$

Планируется применить новую шаговую стохастическую бисимуляционную эквивалентность для упрощения анализа количественного (производительного) поведения методом категоризации (по этой эквивалентности) ассоциированных поведенческих структур (систем переходов, ПМЦ, ДВМЦ и РДВМЦ).

Публикации

- [Tar19] TARASYUK I.V. *Discrete time stochastic and deterministic Petri box calculus*. — Ithaca, NY, USA: Computing Research Repository, Cornell University Library, May 2019. — 57 p. — (Prepr./ [CoRR](#); No. [abs/1905.00456](#); [arXiv:1905.00456](#).) RSCI indexed.
- [Tar20a] TARASYUK I.V. *Stochastic bisimulation and performance evaluation in discrete time stochastic and deterministic Petri box calculus dtsdPBC*. — France: [HAL Open Archives](#), May 2020. — 113 p. — (Prepr./ No. [hal-02573419](#).) RSCI indexed.
- [Tar20b] TARASYUK I.V. *Discrete time stochastic and deterministic Petri box calculus dtsdPBC // Siberian Electronic Mathematical Reports*. — Novosibirsk: S.L. Sobolev Institute of Mathematics, 2020. — Vol. **17**. — P. 1598–1679. Web of Science, Scopus, Zentralblatt Math indexed. SJR indicator (2020): 0.468 (Q2).
- [Tar21] TARASYUK I.V. *Performance evaluation in stochastic process algebra dtsdPBC // Siberian Electronic Mathematical Reports*. — Novosibirsk: S.L. Sobolev Institute of Mathematics, 2021. — Vol. **18**, No. **2**. — P. 1105–1145. Web of Science, Scopus, Zentralblatt Math indexed. SJR indicator (2021): 0.516 (Q2).

Текст к слайду 1.

В качестве модели параллельных и распределенных систем с дискретными временными задержками рассмотрено дискретно-временное стохастическое и детерминированное исчисление боксов Петри (dtsdPBC), недавно разработанное И.В. Тарасюком. dtsdPBC - дискретно-временное расширение стохастически- и детерминированно-временными мультидействиями известного параллельного исчисления боксов Петри (PBC), введенного А. Бестом, Р. Девиллерсом, Дж.Г. Холлом и М. Кутни. В отличие от непрерывно-временного, дискретно-временной подход позволяет конструировать модели систем с общей тактовой синхронизацией (common clock systems), а также тактируемых и синхронных устройств (clocked devices). В литературе не были описаны неинтерливинговые СПА с дискретным временем, совмещающие постоянные и стохастические задержки.

В синтаксисе dtsdPBC активности - это стохастические мультидействия с (меньшими единицы) вероятностями выполнения в следующий момент времени или детерминированные мультидействия с фиксированными (включая нулевые) временными задержками (неотрицательные целые числа) и весами (положительные действительные числа), необходимыми для разрешения конфликтов. Мощные операции - последовательная композиция `;`, выбор `[]`, параллелизм `||`, переименование `[f]`, ограничение `rs`, синхронизация `sy` и итерация `[* *]`. Преимущество dtsdPBC - гибкий механизм синхронизации по мультидействиям и унаследованные от PBC операции.

Шаговая операционная семантика dtsdPBC определена в стиле структурной операционной семантики (Structural Operational Semantics) с использованием правил вывода для не-действий и действий с целью конструирования помеченных вероятностных систем переходов. Достоинство dtsdPBC - неинтерливинговая операционная семантика, допускающая параллельное (одновременное) выполнение активностей на временных тактах.

Основанная на сетях Петри денотационная семантика dtsdPBC определена на базе dtsd-боксов, подкласса новых помеченных дискретно-временных стохастических сетей Петри с детерминированными переходами (ПДВСДСП), переходы которых могут иметь стохастические и детерминированные (постоянные) задержки (включая нулевые), а также срабатывать параллельно на одном такте. Сетевая денотационная семантика дает наглядное графическое представление моделируемых систем и позволяет применять хорошо разработанные методы анализа из теории (стохастических) сетей Петри. Операционная и денотационная семантики соответствуют с точностью до новой шаговой стохастической бисимуляционной эквивалентности.

Текст к слайду 2.

dtSDPBC хорошо подходит для сохраняющего уровень параллелизма описания и анализа дискретно-временных систем с глобальным временем и центральными часами (временные бизнес-процессы, нейронные и транспортные сети, компьютерные и коммуникационные системы, временные веб-сервисы), сочетающих фиксированные и стохастические задержки активностей, а также массовый параллелизм (промышленные, производственные, массово-обслуживающие, компьютерные и сетевые системы).

Для оценки производительности в dtSDPBC исследованы базовые полумарковские цепи (ПМЦ), извлекаемые из вероятностных систем переходов, соответствующих процессным выражениям, по методу **встраивания**. Метод конструирует **встроенную** дискретно-временную цепь Маркова (ВДМЦ) вероятностей смен состояний ПМЦ и функцию распределения вероятностей (ФРВ) времени пребывания в этих состояниях. **Доказано**, что стабильная функция масс вероятностей (ФМВ) для ПМЦ получается нормализацией элементов ФМВ для ВДМЦ, взвешенных соответствующими значениями среднего времени пребывания (СВП).

Дискретное время пребывания в состояниях каждой такой ПМЦ - геометрически распределенное (включая единичное и бесконечное) или нулевое, то есть превышающие единицу конечные фиксированные задержки разделены на единичные по состояниям для получения поддающейся анализу (полу)марковской модели.

Затем на основе стабильной ФМВ для ПМЦ и вектора СВП процессного выражения dtSDPBC вычисляются различные стационарные индексы (меры) производительности моделируемой системы.

Показано, что альтернативный анализ производительности в dtSDPBC возможен изучением соответствующих дискретно-временных цепей Маркова (ДМЦ) и их редукций (РДМЦ), полученных удалением состояний с нулевым временем пребывания (исчезающих состояний), что облегчает и ускоряет оценку производительности.

Оценка производительности на основе ДМЦ по методу **абстракции** позволяет избежать построения встроенной ДМЦ (ВДМЦ) и взвешивания стабильных масс вероятностей в состояниях их средним временем пребывания. **Доказано**, что стабильная ФМВ для ПМЦ получается нормализацией элементов стабильной ФМВ для ДМЦ, соответствующих состояниям с положительным временем пребывания (действительным состояниям). При этом обнуляются элементы стабильной ФМВ для ДМЦ, соответствующие исчезающим состояниям (т.е. от них **абстрагируются**).

Текст к слайду 3.

Оценка производительности на основе РДВМЦ по методу **удаления** упрощает анализ производительности больших систем благодаря **удалению** состояний безостановочного транзита (исчезающих состояний), в которых выполняются только мгновенные активности. Это дает модель меньшего размера с пересчитанными вероятностями переходов между оставшимися состояниями, которую легче решать напрямую. **Доказано**, что стабильная ФМВ для ПМЦ получается дополнением стабильной ФМВ для РДВМЦ нулевыми элементами, соответствующими исчезающим состояниям.

Новизна нашего подхода к анализу производительности состоит в использовании параллельной (шаговой) операционной семантики dtsdPBC и сохранении уровня параллелизма в извлекаемых моделях производительности (ПМЦ, ДВМЦ и РДВМЦ) за счет их переходов, описывающих совместное выполнение нескольких активностей на такте времени.

Для иллюстрации спецификации, моделирования и количественного (производительного) анализа в dtsdPBC приводится прикладной пример системы путешествий с обобщенными (переменными) вероятностями и весами. Вычисляются индексы производительности данной системы методами **встраивания**, **абстракции** и **удаления**.

Поскольку исчезающие состояния **сохраняются** как **встраиванием**, так и **абстракцией**, последний метод можно интерпретировать как альтернативный первому (и не рассмотренный в литературе) метод **сохранения**. На рисунке внизу приведена классификация методов анализа производительности в dtsdPBC. Новый метод **абстракции** выделен красным цветом.

Текст к слайду 4.

Приведен пример системы путешествий туриста, посещающего новые города. После осмотра очередного города он едет в следующий на ближайшем поезде или автобусе, ожидающих отправления с вокзала. Автобусы отъезжают реже поездов, но на автобусах ехать быстрее. Время пребывания в городе (1 час), число отправок автобусов и поездов (l и m), а также их скорости (θ и ϕ) не зависят от города или вида транспорта, а расстояния между последовательно посещаемыми городами одинаковы.

На рисунке изображены диаграммы системы переходов, ПМЦ, ДВМЦ и РДВМЦ для процессного выражения E системы путешествий. Под рисунком дана интерпретация активностей из спецификации системы путешествий, а также состояний соответствующих системы переходов и цепей Маркова.

Стохастические мультидействия: $(\{a\}, \rho)$, $(\{d\}, \theta)$, $(\{f\}, \phi)$. Детерминированные мультидействия: $(\{b\}, \mathbb{1}_k^1)$ (ждущее мультидействие, т.е. детерминированное с положительной задержкой), $(\{c\}, \mathbb{1}_l^0)$, $(\{e\}, \mathbb{1}_m^0)$ (мгновенные мультидействия, т.е. детерминированные с нулевой задержкой).

Из стохастически- (stochastically-, s-)действительного состояния выполнимы только стохастические мультидействия или никакие (пустая петля с положительной вероятностью). Из ждущее- (waitingly-, w-)действительного состояния выполнимы только ждущие мультидействия. Из исчезающего состояния выполнимы только мгновенные мультидействия.

Текст к слайду 5.

Представлены стабильная ФМВ для ПМЦ и вектор среднего времени пребывания (СВП) процессного выражения E системы путешествий, на основе которых вычисляются стационарные **меры производительности**: среднее время между посещением городов (поездки); доля времени, проведенного в городе (осмотра); доля времени, проведенного в транспорте (поездки); относительная доля времени осмотра к поездке; темп отправления из города или прибытия в город.

Полученные меры производительности системы путешествий позволяют оценить, а также оптимизировать ее производительность, для чего вероятности и веса из спецификации системы рассматриваются как переменные-параметры, изменяющиеся в пределах своих областей определения $\rho, \theta, \phi \in (0; 1)$ и $k, l, m \in (0; \infty)$, а меры производительности - как функции от этих переменных, после чего находятся максимумы и минимумы функций на соответствующих интервалах.

В дальнейшем планируется применить новую шаговую стохастическую бисимуляционную эквивалентность dtSDPBC для сравнения качественного (функционального) и количественного (производительного) поведения, а также упрощения его анализа методом **категоризации** (по этой эквивалентности) ассоциированных поведенческих структур (систем переходов, ПМЦ, ДВМЦ и РДВМЦ).

Текст к слайду 6.

Приведены публикации о новой СПА $dt\text{sdPBC}$. Статья 2021 года [Tar21] об анализе производительности в $dt\text{sdPBC}$ выделена красным цветом. Препринт [Tar19] - первая работа о $dt\text{sdPBC}$, а препринт [Tar20a] содержит самые полные результаты об этой СПА. Статьи [Tar20b, Tar21] опубликованы в журнале с квартилем Q2 в Scimago Journal Rank (SJR) indicator.