И.В. Тарасюк

ПРИВЕДЕНИЕ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ AFP_2 К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. **Для описания** параллельных систем и процессов были предложены различные формальные модели, в том числе алгебраические исчисления и логики процессов. В моделях такого типа процесс описывается в виде алгебраической или логической формулы, и проверка свойств процесса выполняется на основе эквивалентностей, аксиом и правил вывода.

Алгебра AFP_2 (алгебра конечных недетерминированных параллельных процессов), разработанная Л.А.Черкасовой [1, 2], как раз и является такой моделью. В этой алгебре имеются три алфавита: действий $\alpha = \{a, b, c, ..\}$, не-действий $\bar{\alpha} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ..\}$ и тупиковых действий $\Delta_\alpha = \{\delta_a, \delta_b, \delta_c, ..\}$. Формула, представляющая некоторый параллельный процесс, составляется из символов этих алфавитов с помощью связок-операций: ; (*предшествование*), ∇ (*исключение* или *альтернатива*), $\|$ (*параллельность*), $\vee$ (*дизъюнкция* или *объединение*), $\top\!\!\!\top$ ("не случится"), $\tilde{\top\!\!\!\top}$ ("не случится ошибочно").

Денотационная семантика устанавливает взаимосвязь формулы процесса и совокупности частично упорядоченных (по отношению предшествования действий) множеств (ЧУМ), соответствующих данному процессу. Причем в ЧУМ наряду с элементами-действиями могут входить не-действия и тупиковые действия.

Эквивалентность ($\approx_e$) двух процессов определяется как совпадение совокупностей ЧУМ, соответствующих им. На основе этого отношения эквивалентности в работе [2] была дана система аксиом Θ_2 и доказана полнота этой системы на основе понятия канонической формы формулы AFP_2.

Процесс приведения формул сложной структуры трудоемок, поэтому желательно его автоматизировать. В данной работе по системе аксиом Θ_2 строится система правил переписывания RWS_2. Доказано, что если ни одно из правил RWS_2 не применимо к формуле, то она находится в канонической форме.

2. Введем ряд понятий, необходимых для построения правил переписывания.

Подмножество $\alpha(P)$ символов действий из α, встречающихся в формуле P, определяется следующим образом:

$\alpha(a) = a$,

$\alpha(\bar{a}) = a$,

$\alpha(\delta_a) = a$,

$\alpha(P \circ Q) = \alpha(P) \cup \alpha(Q), \circ \in \{;, \|, \nabla, \vee\}$,

$\alpha(\tilde{\|} P) = \alpha(P)$,

$\alpha(\tilde{\|} P) = \alpha(P)$.

В дополнение к понятию $\alpha(P)$, введенному Л.А.Черкасовой [2], определим важное понятие содержимого формулы.

Содержимое формулы $P, cont(P)$, — множество символов из $\alpha(P) \cup \bar{\alpha}(P) \cup \Delta_\alpha(P)$ следующего вида:

1. $cont(a) = \{a\}$, $cont(\bar{a}) = \{\bar{a}\}$, $cont(\delta_a) = \{\delta_a\}$;

2. $cont(P \circ Q) = cont(P) \cup cont(Q)$, где $\circ \in \{;, \|, \nabla, \vee\}$, P и Q не содержат символов $\tilde{\|}$ и $\tilde{\|}$.

Введем также следующие обозначения:

$cont(P) \cap \alpha = cont^+(P)$; $cont(P) \cap \bar{\alpha} = cont^-(P)$; $cont(P) \cap \delta_\alpha = \Delta_{cont(P)}$.

Пусть $\bar{\alpha}(P)$ — алфавит, двойной к $\alpha(P) : \bar{\alpha}(P) = \{\bar{a} | a \in \alpha(P)\}$ и $\Delta(P) = \{\delta_a | a \in \alpha(P)\}$.

;-предшествование — формула вида $P_1; ..; P_n =;_{i=1}^n P_i$, $P_i \in \alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha$ $(1 < i < n)$;

$\|$-конъюнктивный терм — формула,содержащая только операции $\|$ и ; над символами объединенного алфавита $\alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha$;

$\|$-конъюнкция — $\|$-конъюнктивный терм, имеющий вид $P_1 \| .. \| P_n = \|_{i=1}^n P_i$.

Нормальная $\|$-конъюнкция — $\|$-конъюнкция, для которой истинны следующие утверждения:

1) каждая формула P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет одну из следующих форм:

– *элементарная формула a* $(a \in \alpha)$, $\bar{a} (\bar{a} \in \bar{\alpha})$, δ_a $(\delta_a \in \Delta_\alpha)$;

– *элементарное предшествование* $(a; b)$, где a, $b \in \alpha$ и $a \neq b$;

2) если имеется формула P_i $(1 < i \leqslant n)$ в форме δ_a $(\delta_a \in \Delta_\alpha)$, то нет другой формулы P_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, такой, что $P_j = \bar{b}$ $(\bar{b} \in \bar{\alpha})$;

3) для любых формул P_i и P_j $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$, таких,что $\alpha(P_i) \cap \alpha(Pj)$, P_i и P_j должны иметь форму различных элементарных предшествований;

4) для любой пары $P_i = (a; b)$ и $P_j = (b; c)$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ существует терм $P_k = (a; c)$, описывающий транзитивное замыкание отношения предшествования для действий a, b и c.

Назовем 1 (соответственно 2, 3, 4)-$\|$-*конъюнкцией* $\|$-конъюнкцию, удовлетворяющую условию 1 (соответственно 2, 3, 4) из определения нормальной $\|$-конъюнкции. Аналогично введем определение, например 1,2,3-$\|$-конъюнкции. В соответствии с этими определениями нормальная $\|$-конъюнкция есть 1,2,3,4-$\|$-конъюнкция.

Пусть P и Q — нормальные конъюнкции. *P префиксна Q*, если выполняются следующие условия:

1) $cont^+(P) \subset cont^+(Q)$;

2) элементарное предшествование $(a; b)$ является конъюнктивным членом Q, и a, $b \in cont^+(P)$ тогда и только тогда, когда $(a; b)$ — конъюнктивный член P;

3) если $b \in cont^+(P)$, $a \in cont^+(Q)$ и $(a; b)$ — конъюнктивный член Q, то $a \in cont^+(P)$.

Формула P имеет *каноническую форму*, если $P = P_1 \vee .. \vee P_i = \vee_{i=1}^n P_i$, т.е. P — $\vee$-дизъюнкция, где:

1) P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — нормальная $\|$-конъюнкция;

2) любые P_i и P_j $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ различны;

3) любые формулы P_i и P_j $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ не префиксны одна другой.

Аналогично определениям для $\|$-конъюнкций вводим определения 1 (2, 3 соответственно)-$\vee$-*дизъюнкций* и др. Таким образом, каноническая форма — 1,2,3-$\vee$-дизъюнкция. В дальнейшем будем понимать под дизъюнкцией $\vee$-дизъюнкцию, под коньюнкцией — $\|$-конъюнкцию, а под предшествованием — ;-предшествование.

Конъюнкция (дизъюнкция) максимальна, если она не является конъюнктивным (дизъюнктивным) членом никакой другой конъюнкции (дизъюнкции).

Заметим, что конъюнкция характеризует одно из возможных поведений альтернативного процесса и является представлением частичного порядка этого процесса.

Запись $P = \Theta_2 Q$ означает, что равенство формул P и Q алгебры AFP_2 может быть доказано с использованием системы аксиом Θ_2.

Формулы P и Q *изоморфны* тогда и только тогда, когда P может быть сведена к Q (и наоборот) с использованием аксиом коммутативности для операций ∇, $\vee$, $\|$ и ассоциативности для ∇, $\vee$, $\|$, $;$.

Теорема 1 [1, 2]. Любая формула AFP_2 может быть сведена к единственной до изоморфизма канонической форме.

Теорема 2 [1, 2]. Для любых формул P и Q алгебры AFP_2 истинно

$$P \approx_{e} Q \Leftrightarrow P =_{\Theta_2} Q.$$

3. Процесс приведения формулы AFP_2 к каноническому виду с помощью аксиом системы Θ_2 иногда становится трудоемким и нетривиальным из-за того, что эквивалентности приходится применять в ту и другую сторону.

Для того чтобы автоматически привести исходную формулу к одному из изоморфных между собой канонических видов, нужно создать систему правил переписывания без циклов (т.е. процесс приведения должен завершаться за конечное время).

В соответствии с этими требованиями строится *система правил переписывания* RWS_2. Перед описанием этой системы введем необходимое определение.

Замена в формуле P подформулы P_i на Q, $[P]^{P_i}_{Q}$, есть формула $P_1 \circ .. P_{i-1} \circ Q \circ P_{i+1} \circ .. \circ P_n$, где $P = P_1 \circ .. \circ P_{i-1} \circ P_i \circ P_{i+1} \circ .. \circ P_n$, $\circ \in \{;, \|, \nabla, \vee\}$.

В следующих правилах RWS_2 P, Q, R обозначают формулы AFP_2; $a, b, c \in \alpha$; $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\alpha}$; $\delta_a, \delta_b \in \Delta_\alpha$, а цифры в скобках — номера равенств системы Θ_2, которые использовались при построении соответствующих правил.

1.1. $\circ \in \{;, \|, \vee\} \quad \Rightarrow \quad P \circ (Q \circ P) \to (P \circ Q) \circ P$
(1.1,1.3,1.4);

2.1. $(\bullet, \circ) \in \{(\|, ;), (\vee, ;), (\vee, \|)\} \ \Rightarrow \ (P \circ Q) \bullet R \to (P \bullet R) \circ (Q \bullet R)$
(3.1,3.3,3.5);

2.2. $(\bullet, \circ) \in \{(\|, ;), (\vee, ;), (\vee, \|)\} \ \Rightarrow \ P \bullet (Q \circ R) \to (P \bullet Q) \circ (P \bullet R)$
(2.1,3.2,3.4,3.5);

3.1 $P \nabla Q \to (P \| (\prod Q)) \vee ((\prod P) \| Q)$
(4.1);

4.1. $\circ \in \{\|, ;\}, \neg \in \{\prod, \tilde{\prod}\} \ \Rightarrow \ \neg(P \circ Q) \to (\neg P) \| (\neg Q)$
(4.2,4.4,6.10,6.11);

4.2. $\neg \in \{\prod, \tilde{\prod}\} \ \Rightarrow \ \neg(P \vee Q) \to (\neg P) \vee (\neg Q)$
(4.3,6.12);

4.3. $P = a$ или $P = \bar{a}$ или $P = \delta_a \ \Rightarrow \prod P \to \bar{a}$
(4.5,4.6,4.7);

4.4. $P = a$ или $P = \bar{a}$ или $P = \delta_a \ \Rightarrow \tilde{\prod} P \to \delta_a$
(6.7,6.8,6.9);

5.1. $P, Q, R \in \alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha \ \Rightarrow \ (P; Q); R \to ((P; Q) \| (Q; R)) \| (P; R)$
(5.5,5.6);

5.2. $Q \in \alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha \ \Rightarrow \ \bar{a}; Q \to a \| Q$
(5.1);

5.3. $P \in \alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha \ \Rightarrow P; \bar{a} \to P \| \bar{a}$
(5.2);

5.4. $a; a \to \delta_a$
(6.2);

5.5. $Q = b$ или $Q = \bar{b}$ или $Q = \delta_b \ \Rightarrow \ \delta a; Q \to \delta_a \| \delta_b$
(6.4,6.7,6.8,6.9);

5.6. $P \in \alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha \ \Rightarrow \ P; \delta_a \to P \| \delta_a$
(6.5);

6.1. P — 1-конъюнкция, $P' = \delta_a$ — конъюнктивный член $P \ \Rightarrow$
$P \| \bar{b} \to P \| \delta_b$
(1.1,2.1,4.5,6.6,6.7);

6.2. P — 1-конъюнкция, $P' = \bar{b}$ — конъюнктивный член $P \ \Rightarrow$
$P \| \delta_a \to [P]^{P'}_{\delta_b} \| \delta_a$
(1.1,2.1,4.5,6.,6.7);

7.1. P — 1,2-конъюнкция, P' — конъюнктивный член P, $P' = a$ или $P' = b \ \Rightarrow$
$P \| (a; b) \to [P]^{P'}_{(a;b)}$
(1.1,2.1,5.3,5.4);

7.2. P — 1,2-конъюнкция, P' — конъюнктивный член P, $P' = (a; b)$ или $P' = (b; a) \ \Rightarrow$
$P \| a \to P$
(1.1,2.1,5.3,5.4);

7.3. P — 1,2-конъюнкция, $P' = a$ — конъюнктивный член $P \ \Rightarrow$
$P \| \bar{a} \to [P]^{P'}_{\delta_a}$
(1.1,2.1,6.1);

7.4. P — 1,2-конъюнкция, P'-конъюнктивный член P, $P' = \bar{a}$

или $P' = \delta_a \;\Rightarrow$
$P\|a \rightarrow [P]^{P'}_{\delta_a}$
(1.1,2.1,6.1,6.3);

7.5. P — 1,2-конъюнкция, $P' = a$ — конъюнктивный член $P \;\Rightarrow$
$P\|\delta_a \rightarrow [P]^{P'}_{\delta_a}$
(1.1,2.1,6.3);

7.6. P — 1,2-конъюнкция, $P' = (a;b)$ — конъюнктивный член $P \;\Rightarrow$
$P\|\bar{a} \rightarrow [P]^{P'}_{\delta_b}\|\delta_a$
(1.1,1.4,2.1,5.1,6.1,6.4,6.7);

7.7. P — 1,2-конъюнкция, $P' = (b;a)$ — конъюнктивный член $P \;\Rightarrow$
$P\|\bar{a} \rightarrow [P]^{P'}_{b}\|\delta_a$
(1.1,2.1,5.2,6.1,6.5);

7.8. P — 1,2-конъюнкция, $P' = (a;b)$ — конъюнктивный член $P \;\Rightarrow$
$P\|\delta_a \rightarrow [P]^{P'}_{\delta_b}\|\delta_a$
(1.1,1.4,2.1,5.1,6.1,6.3,6.4,6.7)

7.9. P — 1,2-конъюнкция, $P' = (b;a)$ — конъюнктивный член $P \;\Rightarrow$
$P\|\delta_a \rightarrow [P]^{P'}_{b}\|\delta_a$
(1.1,2.1,5.2,6.1,6.3,6.5);

7.10. P — 1,2-конъюнкция, P' — конъюнктивный член P, $P' =$
или $P' = \delta_a \;\Rightarrow$
$P\|(a;b) \rightarrow [P]^{P'}_{\delta_a}\|\delta_b$
(1.1,1.4,2.1,5.1,6.1,6.3,6.4,6.7);

7.11. P — 1,2-конъюнкция, P' — конъюнктивный член P, $P' =$
или $P' = \delta_a \;\Rightarrow$
$P\|(b;a) \rightarrow [P]^{P'}_{\delta_a}\|b$
(1.1,2.1,5.2,6.1,6.3,6.5);

7.12. P — 1,2-конъюнкция, $P' = Q$ — конъюнктивный член $P \;\Rightarrow$
$P\|Q \rightarrow P$
(1.1,2.1,5.7);

8.1. P — 1,2,3-конъюнкция, $P' = (a;b)$ — конъюнктивный член P, в максимальной 1-конъюнкции, содержащей P в качестве конъюнктивного члена, нет члена $P'' = (a;c) \;\Rightarrow$
$P\|(b;c) \rightarrow (P\|(b;c))\|(a;c)$
(1.1,2.1,5.6);

8.2. P — 1,2,3-конъюнкция, $P' = (c;a)$ — конъюнктивный член P, в максимальной 1-конъюнкции, содержащей P в качестве конъюнктивного члена, нет члена $P'' = (b;a) \;\Rightarrow$
$P\|(b;c) \rightarrow (P\|(b;c))\|(b;a)$
(1.1,2.1,5.6);

9.1. P — 1-дизъюнкция, P' — дизъюнктивный член P, P' изоморфно $Q \;\Rightarrow$
$P \vee Q \rightarrow P$
(1.1,1.3,2.1,2.3,5.8);

10.1. P — 1,2-дизъюнкция, Q — нормальная конъюнкция, P' — дизъюнктивный член P, Q префиксно $P' \;\Rightarrow$
$P \vee Q \rightarrow P$
(1.3,2.3,5.9);

10.2. P — 1,2-дизъюнкция, Q — нормальная конъюнкция, P' — дизъюнктивный член P, P' префиксно $Q \;\Rightarrow$
$P \vee Q \rightarrow [P]^{P'}_{Q}$
(1.3,2.3,5.9).

Сделаем краткий обзор системы правил переписывания.

Чтобы избежать бесконечных цепочек вывода вида $P \circ (Q \circ R) \rightarrow (P \circ Q) \circ R \rightarrow P \circ (Q \circ R) \rightarrow ..,\ \circ \in \{;, \|, \vee\}$, вводится правило левой ассоциативности 1.1.

В систему RWS_2 нельзя включать правила коммутативности, применение которых может привести к бесконечным цепочкам вида $P \circ Q \rightarrow Q \circ P \rightarrow P \circ Q \rightarrow ..,\circ \in \{\|, \vee\}$. Поэтому дополнительно вводятся симметричные правила, необходимые при отсутствии правил коммутативности. На этой идее основаны правила дистрибутивности группы 2.

Правило 3.1 позволяет избавиться от символа ∇, а правила группы 4 — от символов $\overline{\|}$ и $\tilde{\overline{\|}}$.

Правила группы 5 используются для удовлетворения свойству 1) нормальной конъюнкции.

В связи с отсутствием правил коммутативности возникают и трудности другого рода, связанные с удалением друг от друга конъюнктивных (дизъюнктивных) членов формулы, к которым можно применить некоторую аксиому. Тогда, в дополнение к подходу, основанному на введении симметричных правил, применяется другой метод. Рассмотрим формулу $P\|Q$ (или $P \vee Q$). В подформуле P, являющейся конъюнкцией (дизъюнкцией), ищется подформула P', такая, что к $P'\|Q$ (к $P' \vee Q$) применима некоторая аксиома из Q_2.

На этой идее основаны правила группы 6, предназначенные для удовлетворения свойству 2) нормальной конъюнкции, группы 7, необходимые для выполнения свойства 3), правила группы 8 для удовлетворения свойству 4), а также правила групп 9 и 10, нужные для выполнения соответственно свойств 2) и 3) канонической формы.

Во избежание бесконечных цепочек вывода вида $(a;b)\|(b;c) \to ((a;b)\|(b;c))\|(a;c) \to (((a;b)\|(b;c))\|(a;c))\|(a;c) \to ..$, в правилах группы 8 конъюнктивный член — транзитивное замыкание отношения предшествования — ищется в максимальной 1,2,3-конъюнкции, содержащей данную. Правило применяется только тогда, когда такого члена в максимальной 1,2,3-конъюнкции нет. Этот прием предохраняет от бесконечного увеличения длины формулы в процессе ее приведения.

Необходимо отметить,что правила 6.1, 6.2, 7.6—7.11 основаны на новых аксиомах, полученных из аксиом Θ_2:

1) $\bar{a}\|(a;b) = \delta_a\|\delta_b$,
2) $\delta_a\|(a;b) = \delta_a\|\delta_b$,
3) $\bar{a}\|(b;a) = \delta_a\|b$,
4) $\delta_a\|(b;a) = \delta_a\|b$,
5) $\delta_a\|\bar{b} = \delta_a\|\delta_b$.

Докажем серию важных утверждений о системе RWS_2 .

Утверждение 1. К формуле AFP_2 не применимо ни одно из правил групп 1—5 тогда и только тогда, когда она является дизъюнкцией 1-конъюнкций.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Заметим, что если к формуле не применимо правило 1.1, то все скобки, объединяющие подформулы, соединенные одинаковыми знаками операций, смещены влево. В дальнейшем будем предполагать, что все формулы уже обладают этим свойством.

Если к формуле не применимы правила 1.1 и 3.1, то в этой формуле нет операции ∇.

Очевидно также, что с помощью правил группы 4 мы избавляемся от $\rVert$ и $\tilde{\rVert}$. Если в формуле есть эти символы, стоящие перед сложными подформулами, то к ней обязательно применимы правила группы 4, смещающие знаки операций $\rVert$ и $\tilde{\rVert}$ к элементарным подформулам видов a, $\bar{a}$, δ_a. Затем, при применении правил 4.3 и 4.4, знаки и исчезают. Итак, если к формуле не применимы правила групп 1, 3, 4, эта формула не будет иметь символов ∇, $\rVert$ и $\tilde{\rVert}$.

Если, в дополнение к этому, к формуле не применимы правила группы 2, приводящие формулу к виду $P = \vee_{i=1}^{m}\|_{j=1}^{n_i} P_{ij}$, то формула является дизъюнкцией конъюнкций с членами P_{ij}, являющимися предшествованиями или элементарными формулами.

Если к тому же к формуле не применимо правило 5.1, то можно заключить, что она — дизъюнкция конъюнкций с членами вида $P_{ij} = (Q_{ij}; R_{ij})$ или $P_{ij} = Q_{ij}$, где $Q_{ij},\ R_{ij} \in \alpha \cup \bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha$.

Правила 5.2—5.6 позволяют избавиться от символов из $\bar{\alpha} \cup \Delta_\alpha$ и одинаковых символов в двучленных предшествованиях. Таким образом, если к формуле не применимы правила групп 1—5, она является дизъюнкцией конъюнкций с членами вида a, $\bar{a}$, δ_a или $(a;b)$, $a \neq b$, т.е. эта формула — дизъюнкция 1-конъюнкций.

$\Leftarrow$ Так как формула — дизъюнкция 1-конъюнкции, в ней все скобки, объединяющие подформулы, соединенные одинаковыми знаками операций, смещены влево. Значит, к ней не применимо правило 1.1. Кроме того, формула имеет вид $P = \vee_{i=1}^{m}\|_{j=1}^{n_i} P_{ij}$, где P — элементарная формула или элементарное предшествование, т.е. к формуле не применимы правила группы 2. Так как она не содержит символов ∇, $\rVert$, $\tilde{\rVert}$, то к ней не применимы правила групп 3, 4. Из элементарности конъюнктов-предшествований следует неприменимость правил группы 5. □

Утверждение 2. К формуле AFP_2 не применимо ни одно из правил групп 1—6 тогда и только тогда, когда она является дизъюнкцией 1,2-конъюнкций.

Доказательство.

$\Rightarrow$ По утверждению 1, наша формула — дизъюнкция 1-конъюнкций. Пусть для формулы не выполняется свойство 2) нормальной конъюнкции. Значит, в формуле есть дизъюнкт, в котором имеются конъюнктивные члены видов $\bar{b}$ и δ_a. Так как формула — дизъюнкция 1-конъюнкций, то этот дизъюнкт

— 1-конъюнкция. Таким образом, к ней применимо правило 6.1 или 6.2, что противоречит исходному утверждению.

$\Leftarrow$ По утверждению 1, к формуле не применимы правила групп 1—5. Правила группы 6 не применимы, так как любой ее дизъюнктивный член не содержит в качестве подформул одновременно элементы из $\bar{\alpha}$ и δ_α. □

Утверждение 3. К формуле AFP_2 не применимо ни одно из правил групп 1—7 тогда и только тогда,когда она является дизъюнкцией 1,2,3-конъюнкций.

Доказательство.

$\Rightarrow$ По утверждению 2, формула — дизъюнкция 1,2-конъюнкций. Достаточно доказать, что из неприменимости правил группы 7 следует выполнение условия 3) нормальной конъюнкции для всех дизъюнктивных членов формулы. Рассмотрим ситуации, когда для дизъюнктивного члена формулы, 1,2-конъюнкции $P_i = ||_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ выполняется условие $\alpha(P_{ik}) \cap \alpha(P_{il}) \neq \oslash$ $(1 \le k \neq l \le n)$ и P_{ik}, P_{il} не являются различными элементарными предшествованиями, т.е. не выполняется условие 3).

0. Конъюнкты видов $\bar{a}$ и δ_a. Для нашей формулы этот случай не имеет места из-за того, что для нее выполняется свойство 2) нормальной конъюнкции.

1. Конъюнктивные члены имеют вид a и $(a; b)$ или b и $(a; b)$. Тогда к конъюнкции, содержащей эти члены, применимо правило 7.1 или 7.2, после чего $\alpha(P_{ik}) \cap \alpha(P_{il}) = \oslash$.

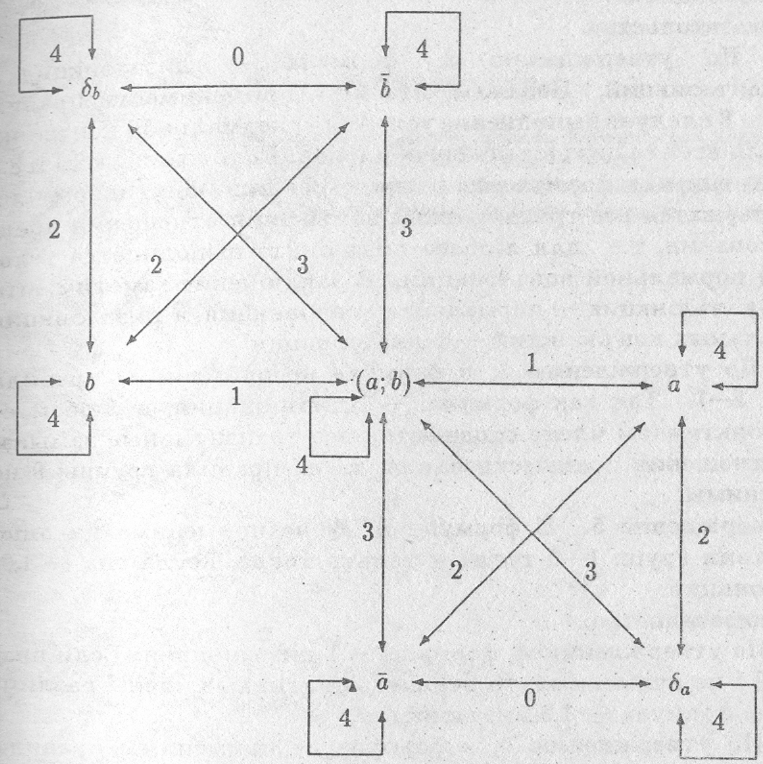
2. Конъюнктивные члены имеют вид a и $\bar{a}$ или a и δ_a или $\bar{a}$ и δ_a. Тогда к соответствующей конъюнкции применимо одно из правил 7.3—7.5. После его применения $\alpha(P_{ik}) \cap \alpha(P_{il}) = \oslash$.

3. Конъюнктивные члены имеют вид $\bar{a}$ и $(a; b)$ или $\bar{b}$ и $(a; b)$, или δ_a и $(a; b)$, или δ_b и $(a; b)$. Тогда к конъюнкции применимо одно из правил 7.6—7.11, преобразующих ее к виду, где $\alpha(P_{ik}) \cap \alpha(P_{il}) = \oslash$.

4. Конъюнктивные члены имеют вид a и a или $\bar{a}$ и $\bar{a}$, или δ_a и δ_a, или $(a; b)$ и $(a; b)$, т.е. совпадают. Тогда к конъюнкции применимо правило 7.12, уничтожающее лишний конъюнктивный член и выполняющее условие $\alpha(P_{ik}) \cap \alpha(P_{il}) = \oslash$.

Связи между конъюнктивными членами наглядно представляются следующей схемой, в которой стрелки с номерами пунктов доказательства этого утверждения соединяют форму-

лы, которые могут быть на месте P_{ik} и P_{il}. Эта схема показывает, что в утверждении рассмотрены все случаи невыполнимости условия 3) нормальной конъюнкции.



Значит, если для формулы не выполняется условие 3), к ней обязательно применимо какое-либо из правил группы 7, что противоречит исходному утверждению. Итак, при неприменимости к формуле правил групп 1—7 можно утверждать, что она — дизъюнкция 1,2,3-конъюнкций.

$\Leftarrow$ По утверждению 2, к формуле не применимы правила групп 1—6. Правила группы 7 не применимы, так как в дизъюнктах 1,2,3-дизъюнкции нет конъюнктивных членов — не элементарных предшествований, содержащих одинаковые символы. □

Утверждение 4. К формуле AFP_2 не применимо ни одно из правил групп 1—8 тогда и только тогда, когда она является 1-дизъюнкцией.

Доказательство.

$\Rightarrow$ По утверждению 3, формула — дизъюнкция 1,2,3-конъюнкций. Покажем, что из неприменимости правил группы 8 следует выполнение условия 4) нормальной конъюнкции для всех ее дизъюнктивных членов. Если правила 8.1 и 8.2 не применимы к формуле, то в каждом ее дизъюнктивном члене содержатся все транзитивные замыкания отношения предшествования, т.е. для любого дизъюнкта выполняется условие 4) нормальной конъюнкции. В заключение заметим, что 1,2,3,4-конъюнкция — нормальная конъюнкция, а дизъюнкция нормальных конъюнкций — 1-дизъюнкция.

$\Leftarrow$ По утверждению 3, к формуле не применимы правила групп 1—7. Так как формула — 1-дизъюнкция, в любом ее дизъюнктивном члене содержатся все транзитивные замыкания отношения предшествования, т. е. правила группы 8 не применимы. □

Утверждение 5. К формуле AFP_2 не применимо ни одно из правил групп 1—9 тогда и только тогда, когда она — 1,2-дизъюнкция.

Доказательство.

$\Rightarrow$ По утверждению 4, формула — 1-дизъюнкция. Если правило 9.1 не применимо, то все дизъюнктивные члены различны, т.е. формула — 1,2-дизъюнкция.

$\Leftarrow$ По утверждению 4, к формуле не применимы правила групп 1—8. Правила группы 9 не применимы из-за того, что по свойству 2) канонической формы в ней все дизъюнктивные члены различны. □

Утверждение 6. К формуле AFP_2 не применимо ни одно из правил RWS_2 тогда и только тогда, когда она находится в канонической форме.

Доказательство.

$\Rightarrow$ По утверждению 5, формула — 1,2-дизъюнкция. Если правила группы 10 не применимы к формуле, то в ней нет дизъюнктов, префиксных один другому, т.е. выполняется свойство 3) канонической формы, а 1,2,3-дизъюнкция — это каноническая форма формулы.

$\Leftarrow$ По утверждению 5, к формуле не применимы правила групп 1—9. Правила группы 10 не применимы, так как в канонической форме нет ни одной пары префиксных один другому дизъюнктов. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cherkasova L. A.** Posets with non-actions: A model for concurrent nondeterministic processes // Arbeitspapiere der GMD. — 1989. — N 403.
2. **Cherkasova L. A.** Algebra AFP2 for concurrent nondeterministic processes: Fully abstract model and complete axiomatization // Reihe Informatic. — 1990. — N 72.